

A Case Study on Designing Dynamic Computerized Learning Materials for Remedial Instructions of Linear Programming

Che-jen Hsieh^{1*} and Pei-chun Hsieh²

¹National Tainan Institute of Nursing, Tainan Taiwan

²National Chao-Chou Senior High School, Pingtung, Taiwan

Abstract—This study uses the Microsoft Excel and Geometer's SketchPad to design dynamic digital materials for learning the linear programming. The design focuses on learning by acting on objects and strengthens the connection between different representations to establish solid mathematical concepts. We choose a student for the remedial program. Before the remedial program, the subject has several misconceptions such as does not understand why the extreme value of linear goal would occur on the boundary points. After the remedial program, the subject establishes correct mathematical concepts and is able to solve the word problem successfully. The result of delayed-test is as good as the post-test, which means the conservation effect of the remedial program is substantively good. After the remedial program, the subject can translate algebraic symbols into real-life situations. This shows the subject has made significant progress on understanding of algebraic symbol and has the ability of translating into multiple representations.

Index Terms—word problems · computer assistant learning · linear programming



* Corresponding author: chejenhsieh@mail.ntin.edu.tw

DOI : 10.6159/IJSE.2013.(3-3).06

線性規劃動態電腦輔助教材設計及其補救教學個案研究

謝哲仁
國立臺南護理專科學校

謝佩君
國立潮州高中

摘要

本研究應用電子試算表及電子幾何板設計線性規劃單元之動態電腦輔助教材。教材設計著重於能透由行動學習數學，加強表徵間意義的連結，以建立學習者穩固的數學概念。研究中選取一位學生進行補救教學。教學前學生存有錯誤概念，例如學生不了解為什麼目標函數的極值會在解集合區域的頂點產生；教學後，學生建立了正確的數學概念，能解出應用問題，並且了解所應用的原理。延後測的結果與後測一樣好，顯示教學具有良好的保留效果。教學後，學生可以寫出代表代數符號的文字情境，由此顯示個案學生對於代數符號的理解及表徵間的轉換能力有明顯的進步。

關鍵字：文字應用題、電腦輔助學習、線性規劃

壹、前言

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1983, 1989) 就指出「問題解決」必須是今後學校數學教學的重心。而問題不是只有來自課本的，還有可能來自於週遭環境。因此，為了讓學生瞭解數學與其生活經驗的關聯，學校中的數學課程因而有了較大的變革。中學數學課程中，線性規劃的文字問題單元就是教授學生，應用數學知識去解決生活中的問題，例如：如何分配才能使產能最大？如何投資才能獲利最大？可是，現有的教材在介紹線性規劃的問題時，常把焦點放在求取答案的運算；又因為施教時間的受限，常會壓縮公式意義的建立或證明。當學生的操作經驗不足時，沒有真正理解數學概念，便容易以背誦的方式來學習，因此，只是操控程序知識，其學習成效將極為有限。例如在學習求極值時，學生機械式的代入頂點求極值，卻不了解其背後的原理。此外，現今教材的處理是去掉情境化的結果，因此學生的學習只侷限於代數符號的運算及解題程序，雖然教材中偶有輔以

圖示說明，但學生往往沒有真正去理解圖形與代數符號所代表的意義及其關聯，因為所學到的數學知識只侷限於程序知識的機械操作上，也就無法將所學到的數學知識，應用在新的問題情境或是實際生活中。久之，學生對數學意義的掌握漸失，對數學也有偏見。周霆(1994)在研究中發現，許多學生無法理解代數文字題的題意，即使學生已具備圖解不等式及求極值的能力，然而在面對代數文字題時，卻無從下手。由此可見學生在解文字應用問題時，文字與代數表徵之間的轉換發生了困難。

因此，本研究將應用電子試算表 (Excel) 數值可變化及數值間動態連結的特性；電子幾何板(N. Jackiw, 2001)幾何物件可操作的效果，並參考相關認知學習的基模理論，設計出可以提供學生由行動去建構數學概念的動態電腦文字題輔助教材。運用所設計的動態電腦輔助教材，學生可以變化題目，操作變數和建立文字題、代數和圖形的關係，進而探究學生在學習過程中，表徵間的轉譯能力改變為何？以及進行補救教學前、後，個案學生的學習成效以及使用動態電腦輔助教材後的想法為何？

貳、文獻探討

一、代數文字題相關研究

根據皮亞傑的認知發展理論，中學生的年齡已達到形式運思的發展時期，應有能力去從事抽象符號的假設及演繹推理的工作，但學生在高中、甚至在大學的學習階段，解文字應用題時仍然產生了許多困難。

C. Laborde(1990)發現在解數學的文字題時，有的學生可以把題目寫成代數式子，但是並不瞭解其意義；有些學生會列式子，但不會運算；也有些學生一開始就不懂得如何把語言訊息轉換成符號來運算。A. B. Lewis & R. E. Mayer(1987)認為多數學生未能成功解題，常出現在問題的理解與表徵甚於問題的求解，所以問題的解題教學應著重問題表

徵訓練，然而現有大部分的教學卻著重問題的解決，特別是在計算的執行。因此，學生是否能將應用問題的語意情境以數學符號來表徵，進而以代數符號運思、進行解題，將是學生能否解應用問題的關鍵。

二、線性規劃文字題錯誤類型分析

周霆(1994)在探究「商職二元一次不等式與線性規劃問題錯誤類型之分析研究」中指出，學生在解線性規劃問題時，常出現許多錯誤概念，以下整理其要點：

(一)學生慣於用頂點原理求目標函數的最佳解，但不清楚其背後的原理，常記憶解題方法，當記錯時容易誤用其方法，因此猜測性錯誤最多。

(二)學生在作答時，將題意轉換成數學語言時產生錯誤。教學經驗中發現學生慣於盲目將題目所給予的條件列式，未思考其因果關係。對學生而言，這也是線性規劃問題最容易發生錯誤的地方。線性規劃問題，一般而言題目較冗長，如果學生沒有先將變數定好，隨即寫出關係式，常會在看完題目後，無法掌握重點，面對大量數據，互相產生干擾，致使列式時錯用資料。

由周霆(1994)的研究結果中得知，學生在解線性規劃文字應用問題時，所面臨的困難主要有二個，一是在文字與代數符號間的轉譯，另一個問題是平行線法與頂點原理的理解及運用。因此，在教材設計上，著重於這二項數學概念的加強與建立。

三、電腦輔助教學

文字應用問題不僅是學生頭痛的問題，如何教也是教師所關心的。Sanford (1927)從文字問題演進的過程，發現文字問題的困難一直伴隨著老師和學生。因此，如何改善現有文字應用題教學的設計，以利於日後建構學生解決文字應用問題的能力，的確需要重視及深入探討的。美國數學教師協會曾於(1989, 2000)提出相關建議：所有各層次的教師為了教導數學技能與概念，讓學生達到有效的學習，都應該使用科技的工具。而如何善用科技工具到數學教學中，更是在科技融入數學教學的另一個重點。

Abramovich (2003)認為電子試算表對於協助代數概念的學習有很大的潛能，而且對於每個階段的學生都可以有幫助。Friedlander (1998)建議將電子試算表作為算術和代數之間建立了一個理想的橋樑，並允許學生能自由的遊走於算術和代數之間。電腦輔助教材的設計對於教師而言的確是一大挑戰，而電子試算表易於操作且功能強大的特性，是一個適合融入數學教學的軟體。在國外的教學與研究中，電子試算表已被廣泛地應用。在臺灣也有許多專家學者開始應用電子試算表，進行教材設計、教學與研究。例如：謝哲仁、李慶志(2002)在研究中利用電子幾何板(Geometer's Sketchpad)與電子試算表(EXCEL)融和認知理論，設計統計學中常態分配單元的視覺化動態教材，讓學習者透由操作來學習高階的數學概念，與傳統的符號背誦與電腦公式輸入計算的學習方式有很大的不同。

GSP是以歐氏幾何作圖為基本概念的數學繪圖軟體，環境中包含座標系統、函數圖形、代數公式，及資料等四個主要部分。每個部分的控制方式，可以是點、片段或按鈕。有別於傳統紙筆尺規作圖畫法，GSP繪圖的便捷之處在於不論是要畫一線段、射線或直線(圖、多邊形、垂直線、平行線)都是非常容易的。此外，只要再利用平移、旋轉等變換即可得到新的圖形物件。而應用此軟體所繪出的任何圖形，對電腦而言都是一個物件。環境中的每一部分，按下某個鍵可幫助使用者做物件的移動或變形；此外，這些圖形(物件)經由一些變化關係連結起來可產生動畫。簡言之，能在銀幕上容易操作物件是此環境的重要要素，而使用者可以拖曳及移動任何點，並觀察其他物件的連續變化。

GSP提供了基本幾何作圖及度量工具，兼具動態、即時、易操作的特性，這些功能及特質，不能提供精確的幾何圖形，而且能協助教師，提供方便操作、易於探討圖形性質的教學及學習的環境。此外，此動態式的視窗環境教學，因為軟體的取得與使用很方便，開發成本不高，並且兼具電腦生動的視覺學習環境，也不會忽略傳統教學法中教師與學生教學的互動、適時的回饋及學生主動操作建構的優點，讓學生充分表達其對幾何的心理意義和表徵，增加學習過程中的創造力(林保平, 1996)，

讓教師也可以從學生的動態學習歷程中觀察學生概念的形成與改變。

有許多學者將認知理論、學習理論，應用在電腦教材的設計上。例如：謝哲仁、李慶志、李文宗（2011）在研究中應用GSP軟體，融入APOS學理，設計動態且可操作的數位化學習課程，並探究學習者是否因而對數學函數、極限、變化率、微分、積分、微積分學基本定理等概念有更深層的理解，並將新物件或情境能以其認知的方式重新表徵。在數學學習中，學生在學習文字應用題時所產生的問題已被重視，因此有學者結合認知理論、學習理論設計電腦教材，將所設計的教材進行文字應用題的相關研究，也得到了不錯的成果。例如：謝哲仁、涂世曜（2004）將日常生活的情境與數學多重表徵連結起來，學習者因此能將日常生活中發生的數值改變現象以代數關係式來表徵。R.D Pea（1987）認為應用科技工具，可以對於心理層次的活動有所幫助。科技工具的使用，使得複雜的過程被簡化，我們透過工具的支持，直接操作物件；因此，電腦在數學教育上的角色已不僅僅是進行數值運算及反覆練習的工具，更可以透過電腦的輔助進行概念的學習及認知的轉變。

四、補救教學

補救教學是指教師診斷學生學習困難後，進行一連串對症下藥的教學活動，具有事後補助的功能，大多數是使用在未達成教學目標或學習有困難者幫助他再學習。因此，補救教學的主要關鍵在於深入了解學生的學習困難後，再設計適當的課程內容與教學模式，才能達到因材施教的目標，也就是補救教學的最終目的。

張新仁（2000）指出補救教學的課程設計，首先要考量學習的原則：由易至難、由簡而繁，從已學到未學等，才能建立學生的自我信心與動機。其次，課程應該具有高度的結構性，同時學習目標需明確與具體，才能掌握學習的重心。此外，學習活動的設計要考量學生的能力、學習動機、學生的接受程度。對中低程度的學生來說，宜簡化教材，學習活動應富有變化，具趣味性。因此，補救教學課程的設計是以根據學生的學習狀況，除了課程設計

要合宜，也要考慮到學生的心理狀況，透由多元化、有趣的課程，引起學生的學習動機並建立其信心也是在設計補救教學課程中重要的一點。C. Laborde(1990)在研究中根據學生的學習狀況，設計電腦輔助教材進行補救教學。補救教學前，個案學生不瞭解比例式意義，且過度使用比例公式求解，更無法運用多重表徵進行解題說明。進行補救教學後，發現學生在動態多重表徵的電腦教材環境下學習，不僅讓個案學生對於比例式更為瞭解，易於掌控兩變量之間的線性關係，同時更能善用多重表徵進行解題和驗算，提高解題之正確率。

因此，研究中的電腦輔助教材設計操作簡單，並且根據學生的能力及需求設計教材。教材難度由易至難，並透由回饋系統讓學生由小成就中增加信心，提高學習興趣。

參、研究設計

一、研究方法

（一）研究設計

本研究旨在探究個案學生在此動態電腦輔助教材環境中學習的前、後，其個案學生線性規劃單元之解題能力及轉譯能力的改變，為獲得深入而豐富的研究結果，以文字的方式敘述事實，因此，本研究採取個案研究方式進行。先進行動態電腦輔助教材設計，並且進行電腦環境預試，讓學生能夠在可以理解及容易操作的環境下進行學習。補救教學課程前先進行前測，以了解學生的狀況。補救教學課程結束後，進行後測以及填寫動態電腦輔助教材使用問卷。後測結束一個月後，進行延後測。所收集的文件資料包括成就測驗前測、後測、延後測、動態電腦輔助教材使用問卷以及教學課程學習單。補救教學是由個案學生自行透由電腦輔助教材進行學習，完成電腦輔助教材中的問題，並且填寫課程學習單。當個案學生學習碰到困難時，再由研究者介入，藉由電腦輔助教材進行引導。進行補救教學之過程中，對於需要進一步探討的部分，加以深入提問，以瞭解研究對象的學習狀況。為求蒐集資料的完整性，研究者將訪談與補救教學過程全程錄音及攝影，並將所收集之資料進行分析。資料分析時，研究者以 R 代表，個案學生以 S 表示。補救

教學課程為極值單元及線性規劃單元。本研究採用不同的資料收集的方法，多個研究者的參與及討論，透過不同角度資料的結合，就方法、人員、資料的三角校正，呈現研究報告的可信度。

(二) 研究對象

研究採立意取樣 (purposeful sampling)，選取一位在線性規劃單元表現不佳的高職三年級學生進行補救教學。學生的數學學習興趣不高，數學成績大約在全班的後百分之二十五。學生之數學科任老師描述學生個性乖巧懂事、做事踏實、勤勞且負責，平時很守紀律。對於自己的自信心較不夠。上數學課時，不太專心，常睡覺，對數學學習缺乏信心。在課業方面的努力不夠，數學方面亦是，較少花時間念數學。

二、檢驗學生學習成效及能力之依據

(一) 本研究中，學生的測驗結果若答對該數學概念題目總題數的三分之二以上，即具備該單元目標的能力。

(二) 線性規劃問題的解題過程為將題目之文字轉譯為代數表徵，代數表徵轉譯成圖形表徵，再應用頂點原理 (平行線原理) 求其極值，進而解出文字應用問題。因此，本研究將學生解題概念發展依解題歷程區分為三階段。第一階段：學生可以了解題意、設立變數並且寫下二元一次聯立不等式及目標函數。第二階段：將二元一次聯立不等式轉譯成圖形表徵。第三階段：應用頂點原理 (平行線原理) 求出目標函數之極值，解出線性規劃問題。

三、動態電腦輔助教材設計

(一) 動態電腦輔助教材設計原則

本研究中所設計的課程教材包含極值及線性規劃二個單元。其中應用 GSP 軟體設計極值單元，應用 EXCEL 軟體設計線性規劃單元。所設計的動態電腦輔助教材著重表徵間意義的建立與連結，透過電腦系統的支持，省去繁複的計算及畫圖的步驟，讓個案學生透過直接操作變數、圖形、參數，能夠確實了解文字題的基本概念，並經由行動 (action) 去探索、歸納、發現與驗證教材內容。本研究所設計的動態電腦輔助教材特色如下：

1. 可行動：物件設計成允許學生主動操作，藉由操作範例中的變數、參數、物件，進行數學實驗，讓學生能夠立即透過電腦輔助教材的學習獲得回饋，並觀察單一表徵內動態變化的情形或表徵間引發之相關變化。

2. 超連結及個別化：每個單元課程中設計數個分頁相互連結 (link)，個案學生可以透過分頁視窗的切換，依個人學習需要自由地前進學習新單元或複習已學過的單元。

3. 多重表徵：每一分頁中同時呈現 (1) 文字模式 (text mode) — 問題情境、操作步驟、定義說明、代數式子意義及結論歸納；(2) 數值模式 (numerical mode) — 學生可以自由操作、探索情境中變數，輸入或猜測問題的答案；(3) 圖形模式 (graphical mode) — 輸入數值，觀察數值在圖形中對應之關係，探究其猜測之正確與否或經由動畫按鈕 (animation button) 及滑鼠操控圖形來觀察對應數值或代數式子之變化。

4. 教具及學具：以教具學具的觀點，根據教材內容及學習認知發展過程，將課程融入電腦輔助學習環境中，以電腦軟體為工具，設計出能夠協助教師教學及幫助學生學習的電腦輔助教材。

5. 使用動態電腦輔助教學與學習的優點：(1) 電腦可輔助計算數值，學生在學習時，不用費時去計算繁複的算式。(2) 作答後會有立即回饋。(3) 呈現相對應的圖形，讓學生在多重表徵的環境下學習數學概念。(4) 電腦輔助教材操作容易。

(二) 動態電腦輔助教材環境預試及修改

由於現階段的學生較少使用動態電腦輔助教材進行學習。因此，在設計完電腦輔助教材後，針對電腦輔助教材中的操作及文字說明部分進行預試，並依學生問卷之建議修改教材，希望所設計出的動態電腦輔助教材讓學生易於操作，且能理解題意及文字說明。

本研究一共進行二次預試，以下表格為預試之間卷內容。

1. 進行第一次預試，預試對象為高職二年級學生二位。預試後，根據學生的建議 (表一)，將所設計的教材進行以下三項修改。

(1) 對於文字說明及操作說明的文字敘述部分加

強，以求詳細、簡單。

(2)控制直角座標的圖形中，X 軸與 Y 軸的單位長，使其相同。

(3)填寫 $<$ 、 $>$ 、 \leq 、 \geq 符號的方式，由填代號改為直接輸入。全部修改完成後，再進行第二次電腦教材環境預試。

表一 第一次電腦環境預試意見彙整表

| 電腦軟體/ 數學單元 | 問卷 內容 | 學生意見及建議 |
|----------------|----------|--|
| EXCEL/線 性規劃 | 文字 說明 | 學生認為清楚且易於理解 |
| | 電腦 設計 | 1.填寫 $<$ 、 $>$ 、 \leq 、 \geq 符號的方式，希望能直接輸入，而不要以代號的方式來填寫。(原設計：空格填入1： $<$ ，2： $>$ ，3： \leq ，4： \geq) 2.圖形中，直角座標的圖形中，希望 X 軸與 Y 軸的單位長相同。 |
| GSP/極值 單元 | 文字 說明 | 1.極值單元中，題目不夠清楚。 2.極值單元中，文字說明要詳細。有些說明太過簡單，有點不懂。 3.極值單元中，不懂邊界點的作用。 |
| | 電腦 設計 | 1.操作的地方要說明清楚。 |

2.進行第二次預試，預試對象為高職二年級學生一位、三年級學生一位。預試後，根據學生的建議(表二)，將文字顏色呈現方式朝簡單化做修改。

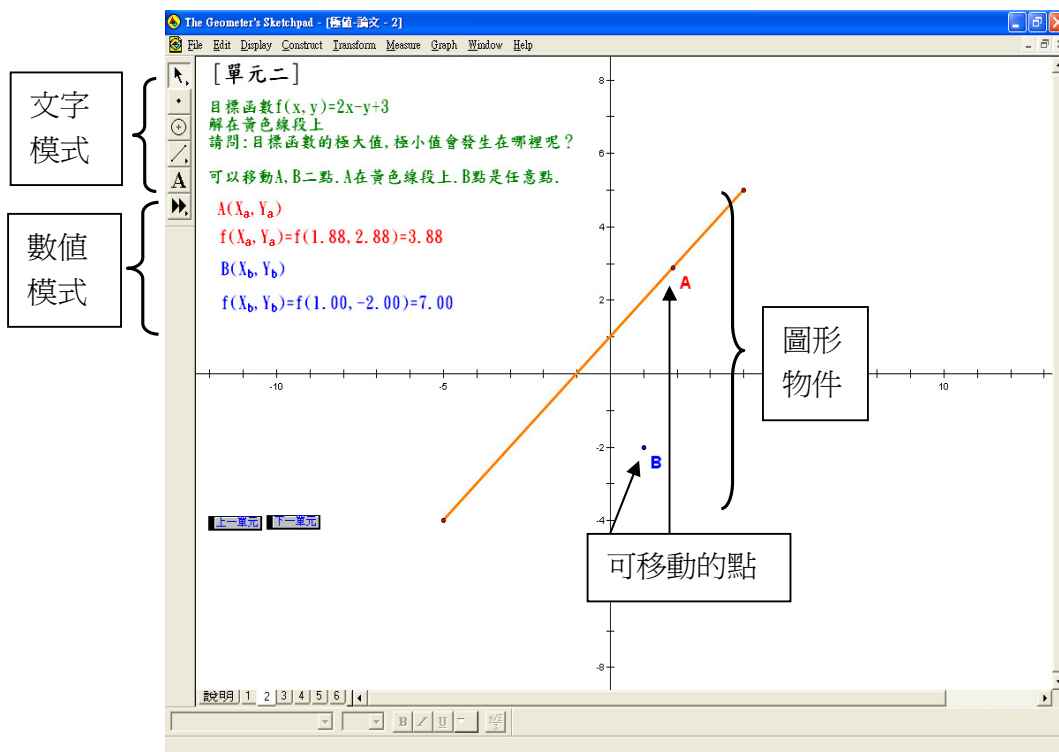
表二 第二次電腦環境預試意見彙整表

| 電腦軟體/ 數學單元 | 問卷內 容 | 學生意見及建議 |
|--------------------|----------|-----------------------|
| EXCEL/ 線性規 劃 | 文字說 明 | 學生認為清楚且易於理解 |
| | 電腦設 計 | 同一個畫面中，文字用不同顏色呈現，太複雜。 |
| GSP/ 極值單 元 | 文字說 明 | 學生認為清楚且易於理解 |
| | 電腦設 計 | 學生認為清楚且易於理解 |

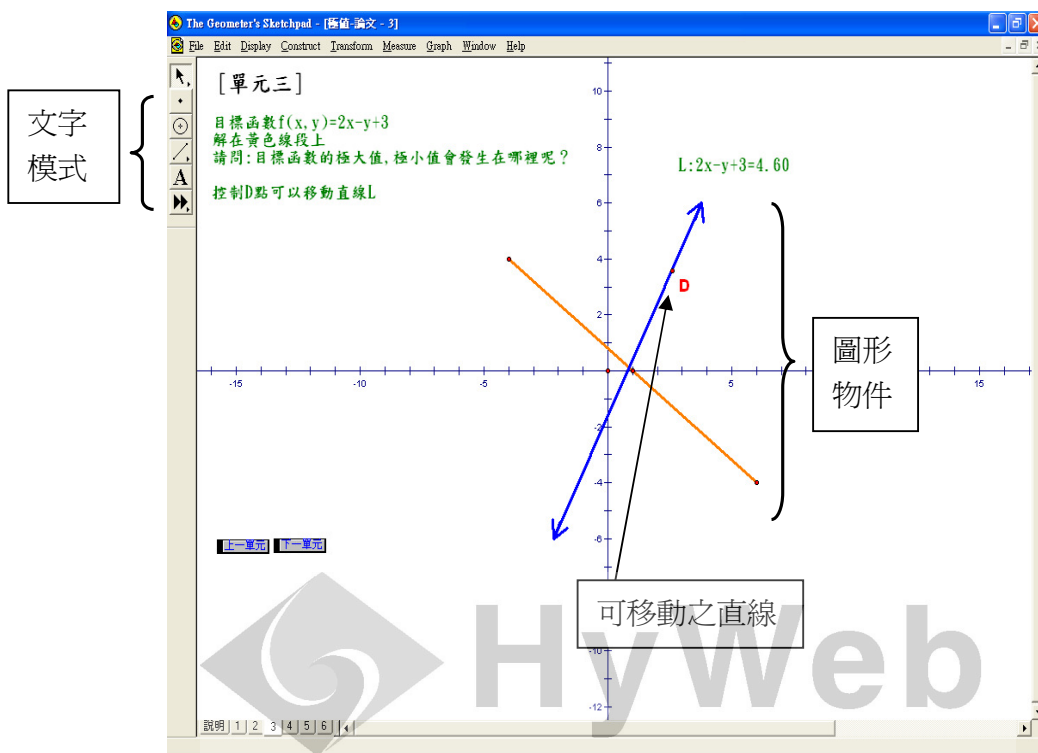
(三) 電腦輔助教材範例

1.極值單元

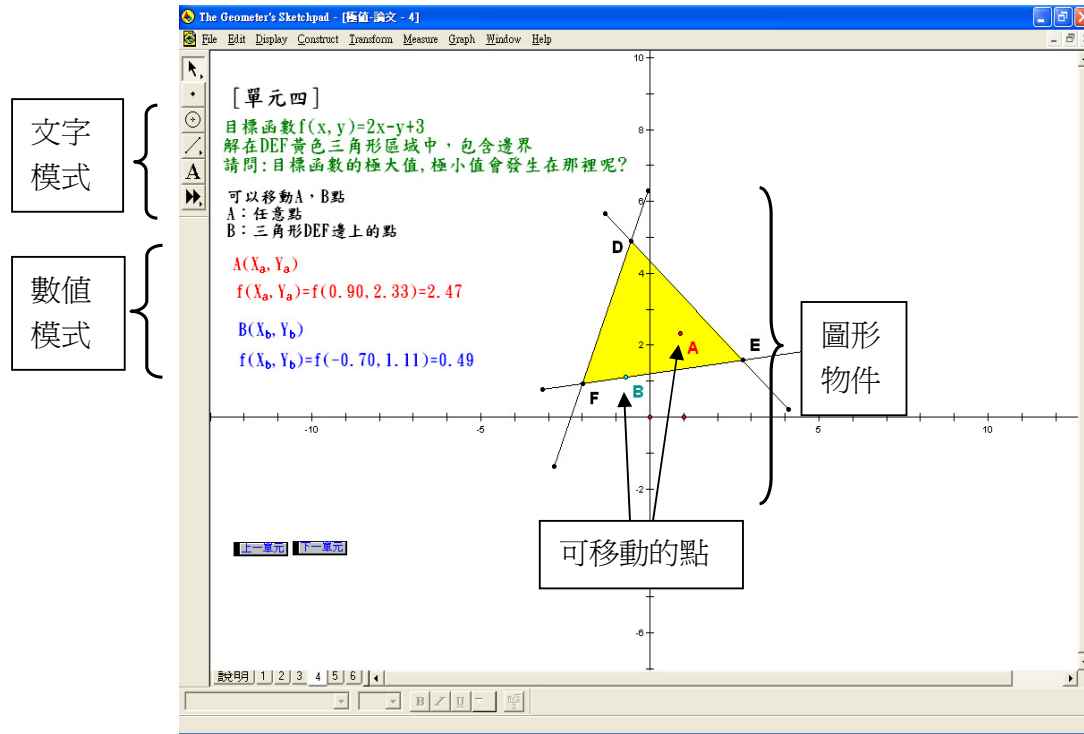
現行高職教材的線性規劃單元課程內容中，求極值的方法有二種，一是頂點原理（代入解集合區域中的頂點），另一種方法是平行線原理（平行移動目標函數等於零的直線）。因此，在電腦教材中，提供了二種方法求極值，一種是移動點，另一種是平移目標函數等於零的直線。讓學生能夠透由行動，移動電腦教材中的點或直線，觀察對應的數值變化。希望學生能透由操作電腦教材建立解極值問題的能力，並且了解其原理而不僅僅是機械式的記憶解題方法。下圖一至圖五為電腦教材環境說明。



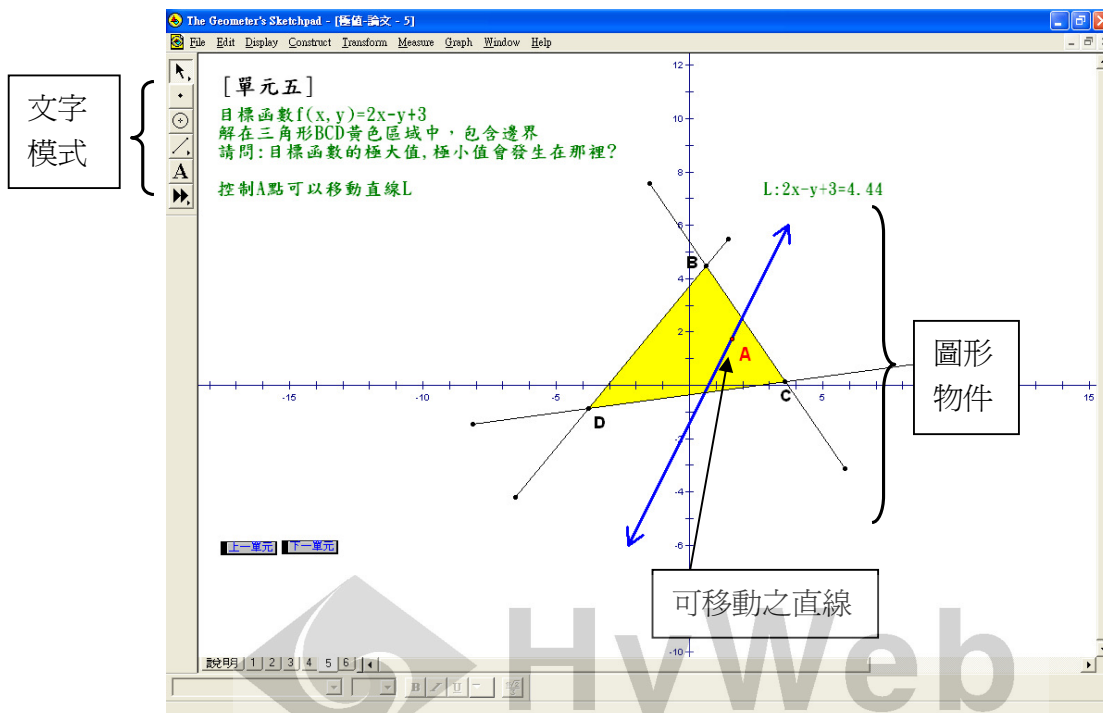
圖一 極值：解集合為線段之極值問題（頂點原理）



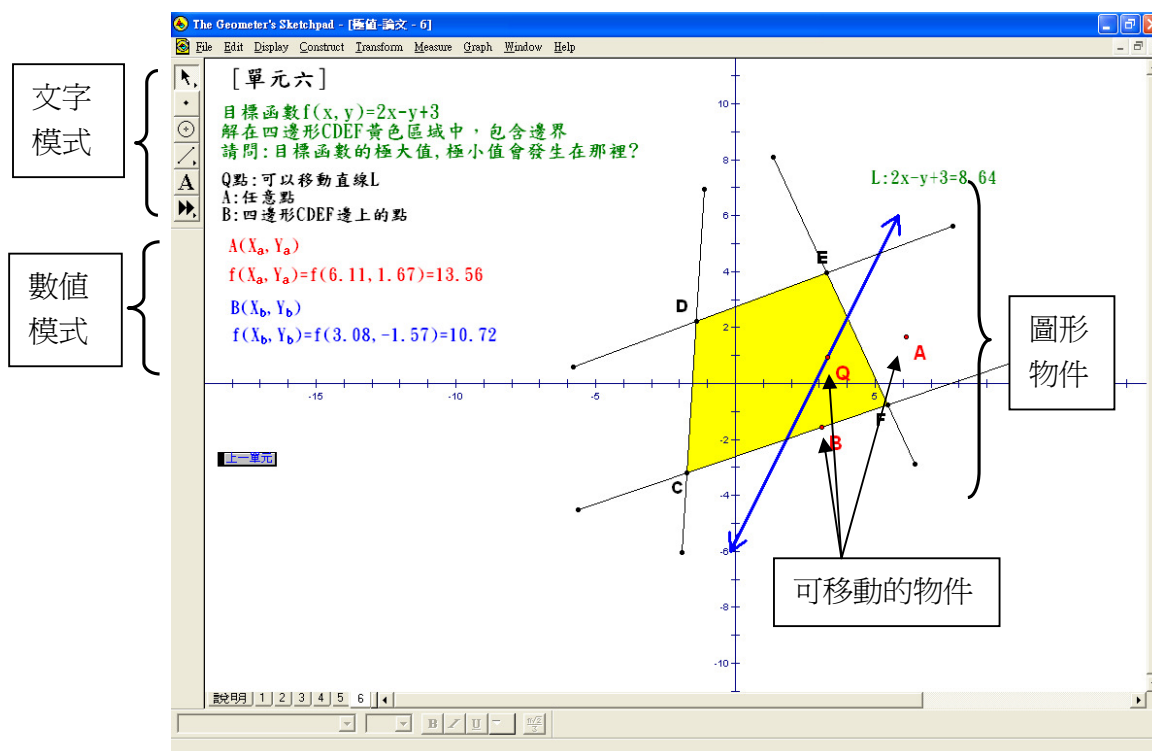
圖二 極值：解集合為線段之極值問題（平行線原理）



圖三 極值：解集合為三角形之極值問題（頂點原理）



圖四 極值：解集合為三角形之極值問題（平行線原理）



圖五 極值：解集合為四邊形之極值問題（平行線原理及頂點原理）

2.線性規劃單元：

此單元一共設計了五個範例：食品問題、建築房屋問題、購買機械問題、送貨問題、土地耕種問題。以食品問題為例來說明。每個範例包含了六小節，如圖六至圖十一。

(1) 第一小節：藉由完成教材中的表格，讓學生對於題目中所給予的資訊有初步的了解。由學生自行輸入數量，去建立變數概念，並進行 X、Y 變數的假設。



(2)

圖六 線性規劃：第一節

(2)第二、三、四小節：三個小節均有3小題。第1小題是由學生自行輸入數字及計算出相關數量。第2小題是以代數符號表示相關的數量。第3小題，是由題意（文字）讓學生寫下代數式子，若答對了，則藍色背景部分會顯示代數式子所代表的意義。答對的同時，右方會顯示出一個相關的圖形。

(a)方框一：讓學生由第(1)小題的數值關係為基礎，過度到第(2)小題以代數符號來表示相對應的數量，加強學生代數表徵能力。

(b)方框二：讓學生對於寫下的代數符號，能夠知道它所代表的意義。所採用的模式是由

文字（範例題目）轉譯為代數符號，完成後顯示代數符號之文字意義（解釋代數符號的意義）。藉此加強學生對於文字與代數間的轉譯能力。

(c)方框三：當學生完成題目後，會出現一個相關的圖形，讓學生的學習中具有代數、文字、圖形三種表徵同時呈現，加強三種表徵間的連結能力及意義的建立。

3.第五節：統整第一節到第四節的內容，目的在建立學生解線性規劃的完整架構，以及複習、統整前四節的課程。

Microsoft Excel - 1-1食物問題-s1

設甲、乙兩種食品
 甲食品每份 30 元，乙食品每份 10 元。
 甲每份含A營養素 5 單位，B營養素 20 單位；
 乙每份含A營養素 20 單位，B營養素 10 單位；
 每個人一天至少需要A營養素 50 單位，B營養素 60 單位
 在費用最少的原則下，應該如何安排甲、乙兩種食品的食用的數量(份)
 獲得足夠的營養？此時最少的花費是多少？

方框一

假設每天吃甲食品 1 份，則需花費 30 元 <2>
 假設每天吃乙食品 1 份，則需花費 10 元
 根據題目 <1> -1、<1> -2，請問：
 吃甲、乙食品每天共花費 40 元

1. 假設每天吃甲食品X份，則需要花費 30 x 元
 2. 假設每天吃乙食品Y份，則需要花費 10 y 元
 3. 根據題目 <2> -1、<2> -2，請問：
 每天吃甲、乙食品共花費 30 x + 10 y 元

方框二

<3> 1. 甲、乙食品各要吃多少份才能滿足營養需求，且使費用最少？
 根據題 <2> 假設每天吃甲食品X份，乙食品Y份。
 希望花費最少。因此
 【目標函數】 $f(x,y) = 30x + 10y$
 【目標函數的意義】
 希望花費能夠最少。
 因此，買甲食品X份、乙食品Y份所需要的總金額愈少愈好
 【右圖直線】 $30X + 10Y = 0$

方框三

Graph showing a line on a coordinate plane with x and y axes ranging from -5 to 5. The line passes through the origin (0,0) and has a negative slope.

圖七 線性規劃：第二節

Microsoft Excel - 1-1食物問題-s1

W39

1 設有甲、乙兩種食品
 2 甲食品每份價格 30 元，乙食品每份價格 10 元。
 3 甲食品每份含A營養素 5 單位，B營養素 20 單位；
 4 乙食品每份含A營養素 20 單位，B營養素 10 單位；
 5 每個人一天至少需要A營養素 50 單位，B營養素 60 單位
 6 在費用最少的原則下，應該如何安排甲、乙兩種食品的食用的數量(份)
 7 以獲得足夠的營養？此時最少的花費是多少？

方框一

1. 假設每天吃甲食品 1 份，則可以得到A營養素 5 單位 <2> 1. 假設每天吃甲食品X份，則可以獲得A營養素 5x 單位
 2. 假設每天吃乙食品 1 份，則可以得到A營養素 20 單位 2. 假設每天吃乙食品Y份，則可以獲得A營養素 20y 單位
 根據題目 <1> -1、<1> -2，請問：
 可以獲得A營養素 25 單位
 3. 根據題目 <2> -1、<2> -2，請問：
 每天共可獲得A營養素 5x + 20y 單位

方框二

<3> 1. 每人每天至少需要A營養素 50 單位。因此，從甲、乙食品所獲得的A營養素總和要大於 50 單位
 2. 根據題目 <3> -1，寫下限制不等式

$$5x + 20y \geq 50$$

 【不等式的意義】
 每人每天至少需要A營養素 50 單位
 因此，吃甲食品X份、乙食品Y份所得到的A營養素總和要大於 50 單位
 【右圖直線】

$$5x + 20y = 50$$

方框三

上一節

下一節

圖八 線性規劃：第三節

Microsoft Excel - 1-1食物問題-s1

L25

1 設有甲、乙兩種食品
 2 甲食品每份價格 30 元，乙食品每份價格 10 元。
 3 甲食品每份含A營養素 5 單位，B營養素 20 單位；
 4 乙食品每份含A營養素 20 單位，B營養素 10 單位；
 5 每個人一天至少需要A營養素 50 單位，B營養素 60 單位
 6 在費用最少的原則下，應該如何安排甲、乙兩種食品的食用的數量(份)
 7 以獲得足夠的營養？此時最少的花費是多少？

方框一

1. 假設每天吃甲食品 1 份，則可以得到B營養素 20 單位 <2> 1. 假設每天吃甲食品X份，則可以獲得B營養素 20x 單位
 2. 假設每天吃乙食品 1 份，則可以得到B營養素 10 單位 2. 假設每天吃乙食品Y份，則可以獲得B營養素 10y 單位
 根據題目 <1> -1、<1> -2，請問：
 共可以獲得B營養素 30 單位
 3. 根據題目 <2> -1、<2> -2，請問：
 每天共可獲得B營養素 20x + 10y 元

方框二

<3> 1. 每人每天至少需要B營養素 60 單位，因此，從甲、乙食品所獲得的B營養素總和要大於 60 單位
 2. 根據題目 <3> -1，寫下限制不等式

$$20x + 10y \geq 60$$

 【不等式的意義】
 每人每天至少需要B營養素 60 單位
 因此，吃甲食品X份、乙食品Y份所得到的B營養素總和要大於 60 單位
 【右圖直線】

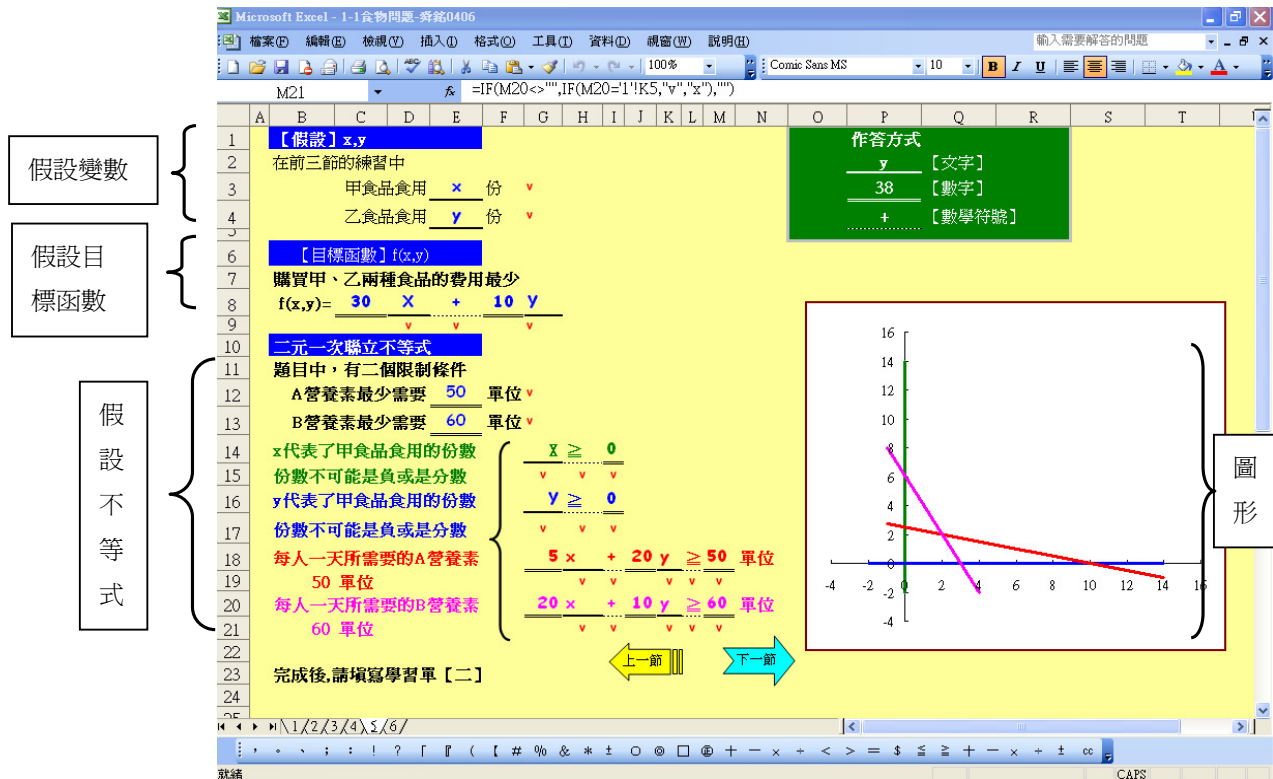
$$20x + 10y = 60$$

方框三

上一節

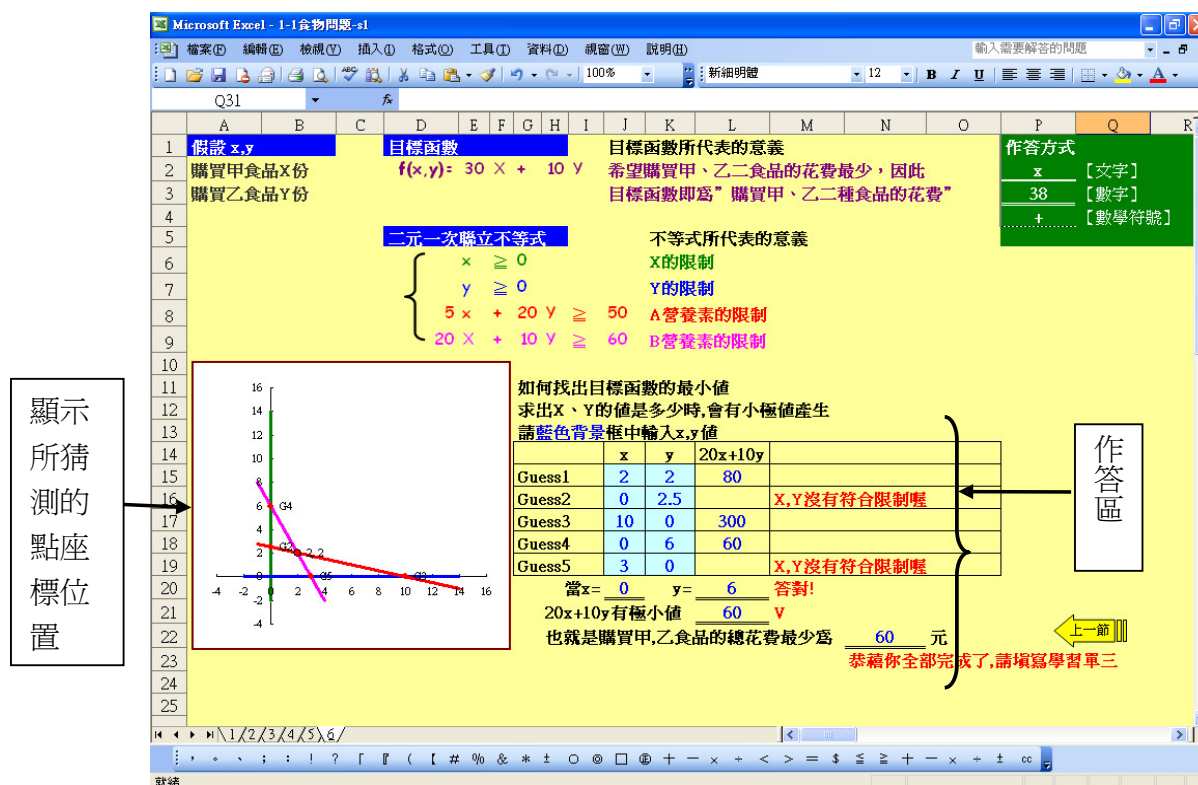
下一節

圖九 線性規劃：第四節



圖十 線性規劃：第五節

4.第六節：個案學生可以自行輸入所要猜測的答案於表格中，對應的圖形中會出現輸入答案的座標位置，並且對於所輸入的答案給予對錯的回饋。學生猜測完後，找到答案後，可在表格下方輸入答案，並由電腦提供的對錯回饋中，知道自己的答案是否正確。



圖十一 線性規劃：第六節

肆、研究結果分析

一、個案學生教學前之概念分析—前測訪談內容

R: 什麼是目標函數?
S: 它要我們算出的目標, 是要符合方程式。
R: 如何解極值問題?
S: 在符合限制的條件下, 都可以代入。全部代入再找出最大或最小的值, 好像是代入邊上的點。
R: 你大概知道要怎麼找極值, 但為什麼極值的問題你都空白?
S: 因為都忘了要怎麼寫。
R: 如何解線性規劃的問題?
S: 忘記了, 大概是列出不等式, 解聯立, 用算的, 算不出來就畫圖。

前測結果分析發現學生以背誦的方式學習數學, 記得大略的解題程序, 但因為沒有真正的理解, 所以面對問題時, 無法進行解題, 答題全部空白。

二、補救教學學習過程記錄與分析

(一)線性規劃單元一

1.訪談一

R: 電腦教材中, 在寫下目標函數前的二個題目練習, 對你寫下目標函數有幫助嗎?

S: 有啊, 就一步一步來, 很清楚, 有點像……建構式數學一樣。

R: 你是如何寫下目標函數?

S: 就看它最後要問你的東西是什麼, 最少的花費是多少。

R: 目標函數 $30X+10Y$ 所代表的意義是什麼?

S: 設甲為 X 份, 甲食品每份是 30 元, 所以是 $30X$ 。假設乙為 Y 份, 每份 10 元, 所以是 $10Y$ 。之後二個再加起來, 就是它們要花的錢。

由訪談中得知, 學生在電腦環境提供的輔助下, 由數值漸漸的過度到代數符號, 建立起代數, 文字之間意義的連結, 並且對於代數符號的意義能說明清楚。

2.訪談二

R: 你是如何寫下 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 的?

S: 看那邊。(指電腦上顯示的文字說明)

R: 在其它的線性規劃題目中, 也一樣都要寫下 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 嗎?

S：幾乎都是，應該沒有例外。

由訪談中得知，學生雖然能成功的寫下變數 X 、 Y 的限制不等式，但對於 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 的限制不等式，只是機械式的寫下，沒有真正理解其限制不等式是與假設變數之限制有關係。

(三)線性規劃單元三

1.訪談一

R：第一小題、第二小題對你寫不等式有幫助嗎？

S：之前有，現在可以跳過。

在學習了三個線性規劃單元之後，學生可以漸漸的減少電腦輔助教材的協助，不需要透過數值的輔助，已經可以直接由題目寫出二元一次聯立不等式，建立了文字轉譯成代數符號的能力。

2.訪談二

R： $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 是如何假設的？

S：這邊啊。(手指電腦顯示的說明「機器的數量不可能是負數或分數」)

R：在其它的線性規劃題目中，也一樣都要寫下 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 嗎？

S：看它題目設置的條件。根據這個吧，機器的數量。

學生不再機械式的寫下 X 、 Y 變數的限制不等式 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ ，由電腦輔助教材中的文字說明注意到變數的限制不等式需由其變數所假設的項目而決定。

(四)線性規劃單元四

R： $4 \geq X \geq 0$ 、 $7 \geq Y \geq 0$ ，你花在這裡的時間很久，一開始你先寫下 $4 \geq X$ ，為什麼會先想到這個？

S：因為它寫最多 4 啊。(題目中所給予的條件)

R：那之後呢？我看你想了很久，大於等於 0 怎麼寫下的？

S：因為車子不可能是負數，且它最多出 4 台，所以它介於 0 跟 4 之間。

R：之前寫下 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 都很快，為什麼今天花這麼久寫下這題的答案？

S：因為之前就習慣性的寫下答案，沒有搞懂它，現在才搞懂。

R：所以你要如何去假設關於 X 、 Y 的限制式？

S：看題目給的限制，出車輛限制。因為 X 假設大貨車的出車數量，所以看出車數量。

R：以後假設 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 都一樣嗎？還是有不一樣的情況？

S：看限制，看它(變數)假設是什麼。

在單元三的學習中，學生透由嘗試錯誤，能找到正確的答案，並且發現了變數 X 、 Y 的限制不等式並非一直都是 $X \geq 0$ 、 $Y \geq 0$ 。學習了三個單元後，學生對於寫變數 X 、 Y 的限制不等式雖然有進步，但仍然沒有建立穩固且正確的觀念。在單元四的學習中，由於題目變化較多，學生花了許多時間在此，並且因為一直答錯而發現過去的解題策略並非正確的，由不斷的嘗試及閱讀教材中所提供的資訊，最後找到正確答案。

三、後測訪談—極值問題

R：第一題你是如何找出極值的？你只代入了 $(0,4)$ 、 $(4,0)$ 、 $(0,0)$ 而沒有畫圖。

S：因為這題很簡單，在腦海裡就有一個圖形出來。就只有三條線，它的範圍是一個三角形。

R：那能代入目標函數的點只有三個嗎？

S：有很多個啊，只要在三角形裡都可以。但發生極值的只有在端點上，所以只代三個點。

R：為什麼極值都發生在端點？

S：因為或許在最右邊的地方就會發生極值。因為往右或往上那個線的數值會愈來愈大。

R：為什麼會想到往右或往上那個線的數值會愈來愈大，可以說明一下嗎？

S：之前不是有做那個把它(目標函數)等於零的直線畫出來。然後把它移動，要平移，愈往端點移動，就會產生極值。

後測測驗中，當學生面對較簡單的求極值問題時，心中即產生了解題所需要的圖形，進而解出極值問題，並能正確的說出解題過程，顯示學生已內化了數學概念。並且可以應用電腦所學習的過程來說明求極值的原理，顯示學生能真正理解應用的原理，並且應用到解極值問題，相較於前測的狀況，有顯著的進步。

四、延後測：代數轉譯成文字之結果分析

延後測時，給予學生二元一次不等式，請學生寫出符合不等式的文字情境，藉以了解學生代數轉譯成文字的能力。下方圖十二至十四為個案學生延後測答題狀況。由學生的答題內容發現，學生可以寫出符合不等式的文字情境，由此可知學生不但建立了線性規劃的解題能力，更建立了由代數轉譯成文字的能力。

請寫下不等式的應用文字情境

$$(1) 10X + 20Y \leq 200$$

老先生有資金 200 萬，
準備用來投資股票，
甲股票每股 10 萬，
乙股票每股 20 萬，
他打算買甲 X 股，乙 Y 股

圖十二 學生答題(1)

$$5X + 15Y \leq 280$$

小明有 280 元，想買糖果，
A 糖每顆 5 元，B 糖每顆 15 元，
所以他買 A 糖 X 顆，B 糖 Y 顆。

圖十三 學生答題(2)

$$50X + 70Y \geq 2000$$

A 食物 50 卡，
B 食物 70 卡，
每天攝取不得低於 2000 卡，
所以 A 食物吃 X 份，B 食物 Y 份

圖十四 學生答題(3)

五、學生成就測驗結果分析

由表三中得知，學生前測時，無法解極值及線性規劃問題，解題能力屬於第一階段，經由電腦輔助教材學習後，學生的解題能力提升至第三階段，而且學生在延後測的表現和後測一樣好，顯示學生的學習具有良好的保留效果。

表三 個案學生之測驗答對率(答對題數/測驗題數)

| 學單元 測驗 | 線性規劃 | | |
|-----------|--------|--------|------|
| | 第一階段 | 第二階段 | 第三階段 |
| | 文字->代數 | 代數->圖形 | 求解 |
| 前測 | 0/8 | 0/4 | 0/4 |
| 後測 | 8/8 | 4/4 | 4/4 |
| 延後測 | 8/8 | 4/4 | 4/4 |

六、動態電腦輔助教材使用問卷結果分析

本研究應用電腦軟體設計動態電腦輔助教材，並應用此教材進行補救教學。在結束教學活動後，藉由此問卷進一步了解個案學生對於使用此教材學習時，教材所給予學生的幫助為何，優點為何。

由學生的問卷中，整理其問卷結果如下三點：

(一)操作簡單易懂，且可以引起學習興趣、增進學習效果，喜歡在電腦環境下學習數學。

(二)教材同時呈現文字、代數及圖形等相關資訊，並可自行操作，輸入數值，易於理解。

(三)電腦設計的回饋功能，讓學生覺得很有信心，且一直想繼續，完成後很有成就感。

伍、結論與建議

一、結論

(一)學生經由行動，在動態電腦輔助教材的多重表徵環境中學習，建立起文字、代數及圖形間意義的連結，形成表徵間轉換的能力，進而成功的解出線性規劃問題，甚至能寫出代表代數符號的文字情境，顯示學生對於代數符號意義的理解有顯著的進步。由此可知，動態電腦輔助教材對於學生建

立表徵間意義的連結有極大的幫助。

(二) 求解極值問題時，學生知道以平移直線的方法來說明極值發生在端點的原因。由此可知，經由操作動態電腦輔助教材的學習後，學生能夠解釋極值發生於端點的原因，並了解頂點原理的意義，突破了學生以往用記憶或機械式的解題策略，建立了有意義的數學學習。

(三) 動態電腦教材允許學生直接對物件（如點，直線）操作，讓學生覺得學習變得容易，對於概念的學習與理解有幫助。電腦設計中的回饋系統能建立學生信心，讓學生有成就感，並提升了學生的學習意願。

二、建議

(一) 應用 Excel 軟體可設計出具有文字、數值及圖形等多重表徵的動態電腦輔助教材，且軟體取得容易，設計原理簡單，適合教師應用於數學教材設計。

(二) 在動態電腦輔助教材下學習，學生依自己的進度學習，由回饋系統中知道對錯，若碰到困難，可以進行試驗，不會馬上放棄學習，能提升學習意願及興趣。教師可以嘗試藉由電腦教材的輔助，讓數學課程由靜態且被動的型態，推展到立體動態且主動的型態。

誌謝

本研究為國科會補助研究計畫（計畫編號 NSC 94-2521-S-439-001）之部份成果，特此誌謝

陸、參考文獻

- [1]周霆(1994)。商職二元一次不等式與線性規劃問題錯誤類型之分析研究。國立高雄師範大學數學系教學碩士班碩士論文，未出版。
- [2]林保平(1996)。動態幾何軟體在教學上的應用。收於八十四學年度輔導區地方教育輔導教育研討活動論文集，頁 128-152。
- [3]張新仁(2000)。補救教學面面觀。收於國立高雄師範大學主編，九一年一貫課程改革下補救教學方案研討會論文集編。高雄：國立高雄師範大學。
- [4]謝哲仁、涂世曜(2004)。利用 Geometer's Sketchpad 電腦軟體設計動態視覺情境化線型函數學習之活動。教學科技與媒體，67，

78-90。

- [5]謝哲仁、李慶志(2012)。在動態視覺環境下常態分配函數學習之設計。教育技術期刊，2(2)，11-20。
- [6]謝哲仁、李慶志、李文宗(2011)。數學概念之動態表徵設計與其認知過程。國科會計畫研究九十九學年度國科會數教學門結案報告（編號：NSC 99-2511-S-439-001），未出版。
- [7]A. B. Lewis & R.E.(1987). Mayer, "Students' miscomprehension of relation statements in arithmetic word problems," *Journal of educational psychology*,79,pp.361-367.Doi: 10.1037/0022-0663.79.4.363
- [8]A. Friedlander.(1998). "An EXCEL lent bridge to algebra," *Mathematics Teacher*, 91(50),pp.382-383.
- [9]C. Laborde. (1990)."Language and Mathematics," In P. Neshet & J. Kilpatrick(Ed.),*Mathematics and Cognition : A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.44-19). NY : Cambridge University Press. Doi: 10.1017/CBO9781139013499.005
- [10]Lee, C. J. and Hsieh, C. J. (2013). A case study of remedial instruction of a sixth grader in solving of proportionality problems in a dynamic multiple representation computer environment. *International Journal of Science and Engineering*, 3(2), 31-37。ISSN:2223-4489. Doi: 10.6159/IJSE.2013.(3-2).04
- [11]National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(1983).*An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA.: NCTM .
- [12]National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(1989).*Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.Doi: 10.1111/j.1949-8594.1990.tb12025.x
- [13]National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- [14]N. Jackiw.(2001). *The Geometer's sketchpad (version 4)*[Computer software]. Emeryville, CA: Key Curriculum Technologies.
- [15]R.D Pea.(1987)."Cognitive technologies for mathematics education," In A. H. Schoenfeld (ed.). *Cognitive Science and Mathematics Education*.(pp.89-122). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- [16]S. Abramovich. (2003).*Spreadsheet-Enhanced Problem Solving in Context as Modeling*. *eJournal of Spreadsheet in Education* 1(1), pp.1-17.
- [17] V. Sanford.(1927). *The History and Significance of Certain Standard*

Problem in Algebra. New York : Bureau of Publication , Teachers

College, Columbia University. Doi: 10.2307/2298438

Biographies



Hsieh *che-jen* completed his PH. D from the University of Georgia. He is currently serving as associate professor at National Tainan Institute of Nursing. He has published more than 100 articles on the field of learning mathematics concept with the computer.

Hsieh *Pei-chun* completed a master degree at the field of mathematics education from National Tainan University. She is serving at National Chao-Chou Senior High School as a substitute mathematical teacher.



