International Journal of Science and Engineering
http://www.scieng.nutn.edu.tw/ch/item.php
International Journal of Science and Engineering (issued by NUTN) Vol.9 No.1(2019):37-56

An Analysis of Error Patterns of Logarithm Operations by Senior High School Students in Tainan City

Chi-Chung[1], and Chien-Chung Huang[2]
[1] National Hsin Hua Senior High School, Tainan, Taiwan
[2] Department of Applied Mathematics, National University of Tainan, Taiwan

Abstract

The purpose of this thesis is to investigate the solving performance on logarithm operations of the senior high school students in Tainan City. By generalizing their error patterns and analyzing the possible reasons for making mistakes in order to know students' difficult part in learning. The results could be reference for teachers. To achieve the goal, we created a specific test, "Definition and operations of logarithm", which covered two main subjects classified into four parts according to different concepts and types, 26 problems were included. There were 37 senior high school students in Tainan City being chosen to complete the test. Some of them were interviewed due to their performances without being against with their willingness. The quantitative data were analyzed via SPSS 21 and was compared with the results of interview to figure out the error patterns and analyze the possible reasons for making mistakes.

The results of the research was concluded as follows:

1. We classified the error patterns into 5 categories:
   a. Be incapable or do not accomplish the problem.
   b. Do not understand the definition of logarithm:
   Be confused about the symbol's meaning and limitations of logarithm.
   c. Mistake logarithm operation:
   Do not be skilled at logarithm formulas. Be confused about logarithm operation. Create wrong logarithm formulas. Use incorrect logarithm formulas.
   d. Mistake index operation:
   Easily make mistakes while dealing with the index problems and scientific notation problems.
   e. The others:
   Do not write down the correct answer. Make mistakes because of calculation error.
2. The main reasons for the mistakes in logarithm operations:
   a. Lack some necessary background knowledge, especially in index problems and scientific notation problems.
   b. Be poor at basic counting operations. Easily make mistakes while doing the basic counting operations and the decimal fraction problems.
   c. Be confused about logarithm concept. Forget or mistake the symbol's meaning and the limitations of logarithm. Easily make mistakes while switching between index and logarithm.
   d. Be confused about the piths of logarithm formulas. Create wrong logarithm formulas. Be confused about logarithm pithy formulas.

Index Terms ─Senior High School Students, Logarithm Operations, Error Patterns, Causes of Error Patterns

----

* Corresponding author:lisa99529@gmail.com
DOI：10.3966/222344892019040090100 4

台南地區高中學生在「對數」單元之錯誤類型分析

*鍾琪[1]，黃建中教授[2]
[1]國立新化高級中學，台南，台灣
[2]國立台南大學應用數學系，台南，台灣

摘要

研究的目的在探討台南地區某高中學生在「對數」單元中的學習狀況，並整理出學生在運算中發生的錯誤類型及分析可能的錯誤原因，藉此了解學生在本單元學習的困難點，以提供教師作為教學參考。為了達到這個目的，研究者自編「對數的意義與對數的運算」測驗，該測驗由兩大主題，其中依照不同觀念、題型，分成四個部分，共有 26 個題目。研究者選取台南市某所公立高中學生共 37 人完成紙筆測驗，再依照學生意願及答題反應，選取部分學生進行晤談。研究以 SPSS 21 分析量化資料並比對晤談內容，整理出錯誤類型及可能發生的錯誤原因。分析研究結果如下：

一、 研究者將台南地區某高中學生在「對數」單元之錯誤情形分為五類：

（一）不會或未完成。

（二）對數基本意義與符號不清楚：

對對數的符號意義及定義不清楚；對對數底數及真數的限制不清楚。

（三）對數運算問題：

對數運算及公式的運用不熟悉，計算時容易混淆、誤用公式或自創錯誤公式。

（四）指數運算問題：

指數的換算（包含科學記號的轉換）容易出錯。

（五）其他：

計算結果未化簡完成、計算粗心錯誤等。

二、 台南地區某高中學生在「對數」單元發生錯誤的主要原因為：

（一）先備知識不足：主要在指數及科學記號轉換上能力不足，容易出錯。

（二）計算能力弱：在做基本四則運算，或小數計算時，容易粗心計算錯誤。

（三）對數概念不清：對對數的條件、限制不清楚或忘記，對對數符號存在意義不清楚，指對數轉換易出錯。

（四）對數公式混淆：先後學的公式互相混淆，自創錯誤公式，亦混淆背公式口訣。

關鍵字：高中學生、對數運算、錯誤類型、錯誤原因

1. 前言

對數是高中課程中非常重要的單元，卻也是高中數學中最令學生頭痛的一個單元之一，為了學習這個新的數學符號，以及符號的使用方式，學生往往在學習過程中遇到許多困難。而學生學習 log 時多偏於強迫記憶，缺乏思考，無法習得對數存在的真正意義，只是把 log 當作一個符號而已。然而，對數又是一個在各個領域中非常重要且經常使用的工具，因此學生將對數學好，能在未來的學習、發展上有莫大的幫助。針對學習這個單元，需要相當好的邏輯、統整、理解能力，才能融會貫通，並可靈活的運用到各個領域。「在錯誤中學習」本就是一種最實用的學習方法，若老師能透過歸類學生學習中的錯誤，了解常見的錯誤概念，將能在教學上更切中要害，道出學習關鍵，也確實提醒學生在學習上的盲點及迷思，讓學習者及教學者皆能事半功倍。本研究針對高中數學的教材內容，提出對數之相關基本問題，給學生作答，再整理出學生的作答時常出現的錯誤類型，並探討這些錯誤形成的原因。本研究主要動機為，幫助學生對對數的學習，亦能讓教師在課程設計、教學評量和補教教學上作為參考，進而幫助學生的學習及教師的教學成效。

2. 理論概念發展

2.1 概念的意義與學習

很多人在求學過程中，時常聽到老師說學習「概念」很重要，將概念基礎打好，學習效率就會好。Skemp(1979)提到概念是把具有相似性或共通性的經驗歸納在一起。概念形成的過程與結果泛稱為「抽象化」，是一種持續性的心智變化，使我們了解周遭環境與經驗的相似性與共通性，使我們可以用舊經驗的相似性與共通性來學習新經驗。概念讓我們有分類的能力。Piaget 將 智能發展分為感覺動作期（sensorimotor stage）、運 思預備期（preoperational stage）、具體操作期 （concrete operation stage）、形式操作期（formal operation stage）四個主要時期。數學概念的特徵是抽象的，且具連貫性的，一個數學概念是由某些概念抽象化後再抽象化而得，若無法了解或融會貫通前一個概念，將難以繼續進行往後的數學相關概念學習。因此教學上的每一個環節，都必須注意學生是否真正習得概念。

2.2 數學解題歷程之探討

數學解題(problem solving)一直是數學教育中相當重要的課題，更被數學教育家認為是數學學習教育的焦點。

表一 解題歷程理論比較表

專家學者	理論	內容步驟
Polya(1957)	問題解決四步驟	1.理解問題 2.擬訂計畫 3.執行計畫 4.回顧解題
Lester(1980)	解題歷程	1.察覺問題 2.理解問題 3.分析目標 4.擬訂計畫 5.執行計畫 6.歷程評估

Schoenfeld(1985)	解題 歷程	1.讀題 2.分析 3.擬訂計畫 4.探討 5.執行 6.驗證
Mayer(1992)	解題 歷程	1.問題表徵 (1)問題轉譯 (2)問題整合 2.問題解決 (1)解答的計畫與監控 (2)解答的執行

資料來源：莊景文(2013)。**桃園地區高二學生空間向量單元之錯誤類型分析**。

綜合表一各專家所提出之理論，解題歷程大約可以分為下列幾個步驟：
讀題（理解題意）、分析（分析題意）、擬定（解題計畫）、執行（執行計畫）、評估（評估過程）、回顧（回顧歷程）

2.3 對數發展史

十五、十六世紀實，各種科學領域的知識都有大幅度地擴展，由於天文研究和地理大發現的發展，航海事業蓬勃發展，進而帶動了天文學和三角學的發展。人們在海上航行時需要進行天文觀測來確定船隻行駛的方向，這些發展牽涉到越來越多的數據資料，遇到繁複的數學計算，如何簡化運算是當初迫切需要解決的問題，這樣的需求迫使數學家及天文學家不遺餘力的研究並創造新的運算方式，對數就在這樣的契機下產生了。

然而最早的對數發現大約在西元前 1800 年，巴比倫人所遺留下來的瓦片中，就可以找到一些由某個給定數之後連續乘方所成的表，發現具有「對數」意涵的數對，在某種程度上，巴比倫人的確使用過某種對數表，意味著在巴比倫人時代就有對數的概念，但巴比倫人的對數表中數的間隔太大，所以還不能作為一般算計之用，只能用來解一些特殊問題。(趙文敏，1985；鄭惟厚譯，2007)

蘇格蘭業餘數學家，納皮爾(John Napier, 1550-1617)花了二十年的時間製造出對數表，發表在《奇妙的對數定律說明書》此著作裡。

直到十八世紀，瑞士數學家尤拉(Euler)發現了指數與對數是互相可逆的關係。西元 1770 年左右，尤拉在他最暢銷的代數教科書《代數的完整介紹》(Complete Introduction to Algebra)就寫下現今所流傳的對數定義形式。

3. 錯誤類型及錯誤原因

Rodatz(1979)的研究指出教師經由錯誤分析可提供學生學習結果的大量訊息，增進個別化教學成果；對學生而言，錯誤創造一個新的學習機會，讓學生認識錯誤並避免錯誤。李盛祖(1997)也指出教師若想確實幫助學生學習，就必須找出學生犯錯的類型及原因。

3.1 錯誤類型

李芳樂(1993)提到早期的心理學家認為錯誤可以分為兩種：其一為不小心做錯所以造成的錯誤，稱為疏忽(slip)；另一種則是由於學習了不正確的觀念或程序而導致的錯誤，又稱為系統性錯誤(systematic errors)。Maurer(1984)指出學

生在數學上所犯的許多錯誤是有系統性的，而這些錯誤皆為非隨機性的永久性錯誤，有時候會自我矯正，但有時候會自動地一再發生。由於系統性錯誤算是事出有因，一般傾向研究系統性錯誤，以便了解錯誤學習的地方。透過對系統性錯誤的研究，能增加學生學習時的關鍵點，診斷學生的過錯，以減少重複犯錯的可能性。

3.2 錯誤原因

陳麗玲(1993)指出錯誤的原因可能是多方面的，導致學生錯誤的原因錯綜複雜，即使相同的錯誤，也可能是不同的訊息處理過程所導致。呂溪木(1983)指出錯誤概念的產生可能源自於學生日常生活的自我學習所得，也可能源自於學生對老師的機械式教學的一知半解。Ashlock(1986)也指出教科書內容常讓學生感到困擾，當老師沒有足夠時間指導學生，學生在沒有充分時間消化教過的數學資訊與概念下，往往建立一些錯誤的概念與規則。為了克服這些錯誤，學生除了自我精進外，更需要教師分析學生錯誤的原因，加以引導、修正。

4. 研究方法

4.1 研究設計

研究者先自研（self-developed）「對數的意義與對數的運算」測驗，並透過陳老師、許老師、吳老師、黃老師四位專業高中數學教師做篩選及修正後，製成預試卷，在進行實驗的學校內另選取與正式施測班級數學程度差不多的班級進行預試。經研究者整理其預試結果，並統計出各題之難度和鑑別度，針對難度過高或過低、鑑別度過低者進行刪題和修改的考驗，形成正式試卷。選取高中某一班級學生共 37 人進行正式施測，研究者統計其答題結果，整理出答對率、錯誤率、列出錯誤過程人數比例、空白人數比例，進而分析各題錯誤型情形，歸納出可能的錯誤類型，再經由與學生的晤談，推論其發生錯誤的原因。蒐集「對數的意義與對數的運算」測驗的正式施測結果後，再以題型類別，找出答錯率較高的幾題，從中選取參與晤談意願較高的學生，在和減低壓力的氣氛與環境下，一對一和學生詳細溝通其解題時的觀念及想法，以深入了解造成錯誤的可能原因，最後再由研究者將晤談過程轉譯成文字敘述，整理歸納出所有可能之錯誤原因，以供教學之參考。

4.2 研究工具

自編「對數的意義與對數的運算」測驗試卷：為了調查高中學生在「對數」單元的錯誤概念、及錯誤類型、和錯誤原因，研究者多次與指導教授討論、修正試題內容，亦參考了很多相關文獻，還請另外四位經驗豐富的高中數學教師協助分析試題內容、修正與調整題意，最後方能編製出此「對數的意義與對數的運算」測驗試卷，期許評量結果能與評量目的相符，真實反映出受測者所具備的知識及能力。

表二 「對數」單元之教學目標

1.了解對數符號的意義，並能將對數與指數作互換
2.能使用指數推導出所有對數的運算性質
3.能熟悉運用對數的運算性質

表三「對數的意義與對數的運算」測驗試題分類表

教學內容			題號
對數的意義與基本概念	對數定義	指數式轉對數式	1
		單一對數化簡(真數為1)	18
		單一對數化簡(真數為小數)	14
		單一對數化簡(底數為分數)	11
		單一對數化簡(真數為根號)	7
		單一對數化簡(兩對數相加)	5
	對數式求值	指數式求指數	10
		對數式求指數式	12
		對數式求真數	17
	對數自然限制	真數限制	2
		底數限制	15
		真數與底數限制	9
		是非題(對數限制)	22
對數的運算與化簡	對數運算	是非題(對數加法)	24
		是非題(對數減法)	26
		對數特殊公式	4
		處理真數次方	8
		換底公式	3
		加法和減法綜合題	13
		換底公式應用	16
		次方處理和減法綜合題	6
		是非題(對數相除)	23
		是非題(對數相乘)	25
		對數運算綜合題型(分數式真數)	19
		對數運算綜合題型(整數式真數)	20
		對數運算綜合題型(真數是5)	21

4.3 晤談

正式測試結束後，先從試卷初步了解學生的錯誤類型。但學生在解題過程中，可能未將其思考步驟完整表現在試卷上，尤其本研究試卷附有「是非題」，學生更容易略過寫下解題過程而直接寫上答案，為了進一步探究其犯錯的原因，本研究採半結構性晤談。蒐集正式施測結果後，再以題型類別，找出答錯率較高的幾題，從中選取參與晤談意願較高的學生，在和諧無壓力的氣氛與環境下，一對一和學生詳細溝通其解題時的觀念及想法，必要時，可搭配紙筆協助。晤談過程中，研究者只做「引導」的動作，並不做「教學」的動作，引導學生說出他內心真正的觀念及做法，但不論學生說出來的是對或錯，研究者皆不教學、修正，為避免學生晤談後離去會對其他的學生洩漏晤談內容，導致後面的晤談內容不客觀。

表四 晤談流程表

晤談步驟	晤談問題
1. 了解題意（閱讀題目）	請你先閱讀題目，看得懂題目嗎？
2. 解題歷程	可以請你告訴我，你是如何得到這個答案的嗎？
3. 應用觀念	你可以說明，這個題目運用到哪些觀念或公式嗎？
4. 覆述過程	（將學生的說明內容用自己的方式重新表達一次後）請問老師剛剛說的跟你說的方法一樣嗎？

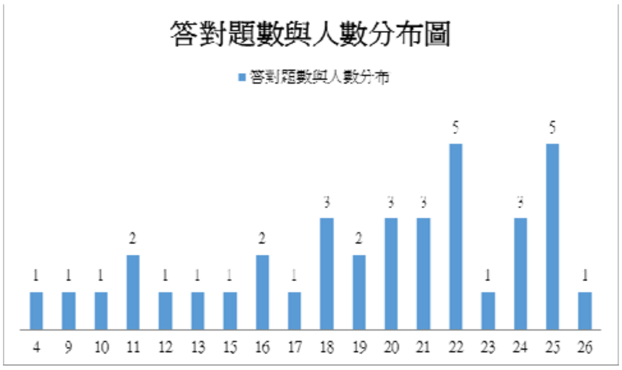
5. 研究結果與討論

5.1 學生答對題數與分布情形

學生的答對題數與分布情形如表所示。學生之答對題數為 4 到 26 題，整體答對率為 73.3%，整體錯誤率為 26.7%，其中答對題數在 18 題以下的人數為 14 人，占有比例 37.8%，因此可發現學生在此單元的學習上的確有探討之必要。

表五 答對題數與人數分布表

答對題數	人數	比例(%)	以下累積人數	以下累積人數比例(%)
4	1	2.7	1	2.7
9	1	2.7	2	5.4
10	1	2.7	3	8.1
11	2	5.4	5	13.5
12	1	2.7	6	16.2
13	1	2.7	7	18.9
15	1	2.7	8	21.6
16	2	5.4	10	27.0
17	1	2.7	11	29.7
18	3	8.1	14	37.8
19	2	5.4	16	43.2
20	3	8.1	19	51.4
21	3	8.1	22	59.5
22	5	13.5	27	73.0
23	1	2.7	28	75.7
24	3	8.1	31	83.8
25	5	13.5	36	97.3
26	1	2.7	37	100.0
整體答對率為 73.3% 整體錯誤率為 26.7%				



圖一 答對題數與人數分布圖

由圖一可發現，學生答對的題數分布於 18 到 25 題，共有 25 人，共佔有全體學生人數的 67.5%。

表六 「對數的意義與對數的運算」測驗各題答題情形

題號	答對人數	答對率(%)	錯誤人數	錯誤率(%)	列出錯誤過程人數	列出錯誤過程人數比例(%)	空白人數	空白率(%)
1	26	70.3	11	29.7	10	27.0	1	2.7
2	31	83.8	6	16.2	3	8.1	3	8.1
3	29	78.4	8	21.6	2	5.4	6	16.2
4	22	59.5	15	40.5	9	24.3	6	16.2
5	31	83.8	6	16.2	5	13.5	1	2.7
6	29	78.4	8	21.6	8	21.6	0	0.0
7	36	97.3	1	2.7	1	2.7	0	0.0
8	22	59.5	15	40.5	15	40.5	0	0.0
9	25	67.6	12	32.4	8	21.6	4	10.8
10	28	75.7	8	21.6	4	10.8	4	10.8
11	35	94.6	2	5.4	2	5.4	0	0.0
12	24	64.9	13	35.1	8	21.6	5	13.5
13	32	86.5	5	13.5	5	13.5	0	0.0
14	24	64.9	13	35.1	11	29.7	2	5.4
15	15	40.5	22	59.5	17	45.9	5	13.5
16	31	83.8	6	16.2	4	10.8	2	5.4
17	35	94.6	2	5.4	2	5.4	0	0.0
18	35	94.6	2	5.4	1	2.7	1	2.7
19	17	45.9	20	54.1	19	51.4	1	2.7
20	28	75.7	9	24.3	7	18.9	2	5.4
21	27	73.0	10	27.0	5	13.5	5	13.5
22	22	59.5	15	40.5	15	40.5	0	0.0
23	23	62.2	14	37.8	14	37.8	0	0.0
24	33	89.2	4	10.8	4	10.8	0	0.0
25	23	62.2	14	37.8	14	37.8	0	0.0
26	23	62.2	14	37.8	14	37.8	0	0.0

5.2 解題情形

整理結果發現，錯誤率落在區間 0%至 64%，依 8%的級距分組，共分為 8 組；空白率落在區間 0%至 18%，依 3%的級距分組，共分為 6 組。研究者整理出學生的錯誤情形分布表，如表七所示。並以錯誤率 32%、空白率 9%作為分界線，將學生的錯誤情形分成四個區域：左上方為低錯誤率、低空白率；右上方為高錯誤率、低空白率；左下方為低錯誤率、高空白率；右下方為高錯誤率、高空白率，可得到表八之結果。

表七 學生的錯誤情形分布表

錯誤率 / 空白人數比例	0%｜8%	8%｜16%	16%｜24%	24%｜32%	32%｜40%	40%｜48%	48%｜56%	56%｜64%
0%－3%	7,11,17,18	13,24	5,6	1	23,25,26	8,22	19	
3%－6%			16	20	14			
6%－9%			2					
9%－12%				10	9			
12%－15%				21	12			15
15%－18%			3			4		

表八 學生的解題策略表

空白率（低→高） \ 錯誤率（低→高）	錯誤率 0%－32%	錯誤率 32%－64%
低	錯誤率 0%－32%；空白率 0%－9% 「越往左上方」： 代表此類的題目較不會困擾學生，而且答題意願越來越高，因此學生錯誤類型及原因較多為個人錯誤。	錯誤率 32%－64%；空白率 0%－9% 「越往右上方」： 代表此類的題目，學生的迷思概念越來越多，但答題意願也越來越高，此類型的題目有最多錯誤類型及原因可供分析。
高	錯誤率 0%－32%；空白率 9%－18% 「越往左下方」： 代表此類的題目學生越容易上手，但空白情形的增加顯示完全缺乏概念的學生比例升高。	錯誤率 32%－64%；空白率 9%－18% 「越往右下方」： 代表此類的題目對學生而言越來越艱難，且完全沒有概念的學生增多，顯示學生較容易放棄而且難與舊經驗連結。

資料來源：陳劭伯(2005)。**九年一貫之國二學生在因式分解單元錯誤類型之分析研究**(頁 43-44)。國立高雄師範大學，高雄市。

5.3 資料分析與晤談

5.3.1 資料分析

研究者比較學生在各類型題型中的答題情形自編之試卷共分為兩大部分，內共含四主題，列舉如下：

(1)第一部分：對數的意義與基本概念

①主題一：對數定義

②主題二：對數式求值

③主題三：對數自然限制

(2)第二部分：對數的運算與化簡

主題四：對數運算

其各類型題型之答題統計如表九所示：

表九 「對數的意義與對數的運算」測驗在各類型題型的答題情形統計表

教學內容			題號	答對人數	答對率（%）	錯誤人數	錯誤率（%）	空白人數	空白人數比例（%）
對數的意義與基本概念	對數定義	指數式轉對數式	1	26	70.3%	11	29.7%	1	2.7%
		單一對數化簡（真數為1）	18	35	94.6%	2	5.4%	1	2.7%
		單一對數化簡（真數為小數）	14	24	64.9%	13	35.1%	2	5.4%
		單一對數化簡（底數為分數）	11	35	94.6%	2	5.4%	0	0.0%
		單一對數化簡（真數為根號）	7	36	97.3%	1	2.7%	0	0.0%
		單一對數化簡（兩對數相加）	5	31	83.8%	6	16.2%	1	2.7%
	對數式求值	指數式求指數	10	28	75.7%	8	21.6%	4	10.8%
		對數式求指數式	12	24	64.9%	13	35.1%	5	13.5%
		對數式求真數	17	35	94.6%	2	5.4%	0	0.0%
	對數自然限制	真數限制	2	31	83.8%	6	16.2%	3	8.1%
		底數限制	15	15	40.5%	22	59.5%	5	13.5%
		真數與底數限制	9	25	67.6%	12	32.4%	4	10.8%
		是非題（對數限制）	22	22	59.5%	15	40.5%	0	0.0%
對數的運算與化簡	對數四則運算	是非題（對數加法）	24	33	89.2%	4	10.8%	0	0.0%
		是非題（對數減法）	26	23	62.2%	14	37.8%	0	0.0%
		對數特殊公式	4	22	59.5%	15	40.5%	6	16.2%
		處理真數次方	8	22	59.5%	15	40.5%	0	0.0%
		換底公式	3	29	78.4%	8	21.6%	6	16.2%
		加法和減法綜合題	13	32	86.5%	5	13.5%	0	0.0%
		換底公式應用	16	31	83.8%	6	16.2%	2	5.4%
		次方處理和減法綜合題	6	29	78.4%	8	21.6%	0	0.0%
		是非題（對數相除）	23	23	62.2%	14	37.8%	0	0.0%
		是非題（對數相乘）	25	23	62.2%	14	37.8%	0	0.0%
		四則運算綜合題（分數式真數）	19	17	45.9%	20	54.1%	1	2.7%
		四則運算綜合題（整數式真數）	20	28	75.7%	9	24.3%	2	5.4%
		四則運算綜合題（真數是5）	21	27	73.0%	10	27.0%	5	13.5%

研究者自編的「對數的意義與對數的運算」測驗共有 26 題，其中有 21 題填充題及 5 題是非題，研究者將試題區分為兩大部分，內共含有四主題。

接下來研究者將正式施測結果依照對應主題，分為下列三個要點來進行分析：

(1)試題說明：描述各題之教學概念、設計目的，以及其測試內容。

(2)各題答題結果分析：統計各題之答對人數、答對率、錯誤人數、錯誤率、列出錯誤過程人數、列出錯誤過程人數比例、空白人數及空白率。

(3)錯誤類型分析：根據各題之學生作答反應，進行歸納、分析錯誤類型和原因並整理出各錯誤類型之人數及比例。研究者將錯誤情形分為五類：

①第一類為「不會或未完成」：此情形為學生嘗試作答，而作答過程缺乏邏輯性，可歸納為學生「不會」或者未完成計算過程。

②第二類為「對數基本意義與符號不清楚」：此情形為學生未了解 log 符號存在的意義，並也不清楚對數的限制條件，導致錯誤使用。

③第三類為「對數運算問題」：此情形為對對數運算公式之不熟悉以及錯誤使用

④第四類為「指數運算問題」：此情形為學生在指數運算發生錯誤。

⑤第五類為「其他」：此情形為學生因為粗心或計算錯誤導致錯誤答案。

經整理後，其錯誤情形分布如表十：

表十 「對數的意義與對數的運算」測驗錯誤情形統計表

錯誤情形	發生次數	發生比率
第一類：不會或未完成	39	20.0%
第二類：對數基本意義與符號不清楚	37	19.0%
第三類：指數運算問題	21	10.8%
第四類：對數運算問題	94	48.2%
第五類：其他	4	2.1%

研究者依以上的結果，整理出常見的錯誤狀況：

(1)第一類「不會或未完成」：在此類型中，除了許多學生因不會寫而中斷計算之外，時常出現學生未將對數化至最簡便結束計算，如：

「$\log_2 96-\log_2 3=\log_2\frac{96}{3}=\log_2 32$」即停止計算，但尚未化至最簡。

(2)第二類「對數基本意義與符號不清楚」：

①不清楚對數符號「$a^b=s\Leftrightarrow\log_a s=b$」的意義，會記成其他錯誤的算式，如：「$a^b=s\Leftrightarrow\log_b s=a$」或「$a^b=s\Leftrightarrow a^s=b$」。

②不清楚真數、底數限制，正確限制為「真數大於 0，底數大於 0 且不等於 1」，而學生時常將大於 0、不等於 1、真數、底數搞混。

(3)第三類「指數運算問題」：學習對數的過程中，指數佔有很重要的部分，而學生卻在指數運算上相當不熟悉，常見的錯誤如：

「若 $(5)^x=\frac{1}{25}$，則 $x=\frac{1}{2}$」、

「若 $(2)^x=\sqrt{2}$，則 $x=-2$」，

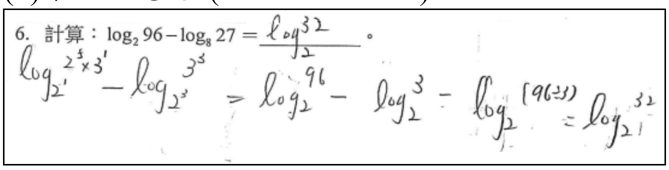
學生在分數及根號轉換上特別容易出錯。

(4)第四類「對數運算問題」：出現次數最多之類型，分為下列幾種情形：

①對數相加，正確公式為「$\log_a s+\log_a t=\log_a st$」，學生常出現的錯誤為「$\log_a s+\log_a t=\log_a s+t$」或「$(\log_a s)(\log_a t)=\log_a s+t$」。
②對數相減，正確公式為「$\log_a s-\log_a t=\log_a \frac{s}{t}$」，學生常出現的錯誤為「$\log_a s-\log_a t=\frac{\log_a s}{\log_a t}$」，且此例為學生最容易出現的錯誤之一。
③換底公式，正確公式為「$\frac{\log_a s}{\log_a t}=\log_t s$」，學生常出現的錯誤為「$\frac{\log_a s}{\log_a t}=\frac{s}{t}$」、「$\log_a \frac{s}{t}=\frac{\log_a s}{\log_a t}$」、「$\frac{\log_a s}{\log_a t}=\log_a s-\log_a t$」，學生容易將分式進行「$log$ 符號的約分」、錯誤合併、或跟減法公式相互混淆。
④特殊公式，正確公式為「$a^{\log_a b}=b$」，這個是學生最不會使用的對數公式，當遇到這類型的題目時，總是無法正確完成。
⑤其他狀況：如：「$(\log s)(\log t)=\log st$」或「$\log_a s\times\log_b t=\log_{a\times b} s\times t$」將兩對數相乘寫成真數相乘。
(5)第五類「其他」：學生在作對數計算的過程中，時常會將符號中的元素遺漏，如：「$\log_a s+\log_a t=st$」、「$\log_a s-\log_a t=\frac{s}{t}$」、「$\log_a s+\log_a t=\log st$」、「$m\log_a s-n\log_a s=m-n$」，對數計算完的結果，卻沒有將 log 寫上去，或者計算到最後，底數卻沒寫上去，導致無法繼續化簡或答案錯誤。

5.3.2 晤談

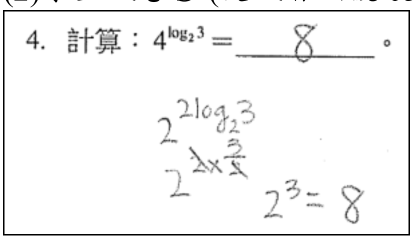
(1)學生試卷① (受試者編號 23)


6. 計算：$\log_2 96-\log_8 27=\log_2 32$ 。
$\log_{2^1} 2^5\times3^1-\log_{2^3}3^3=\log_2 96-\log_2 3=\log_2(96\div3)=\log_{2^1}32$

(i)分析原因：「不會或未完成」：未將答案化至最簡。

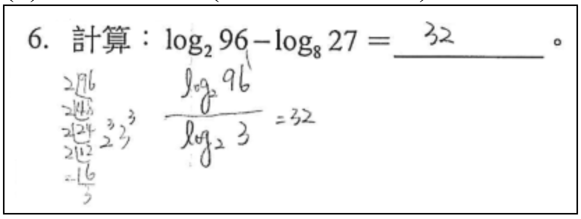
(ii)探討：學生在學習的過程中，容易學到後面就忘記前面，雖然學習了越多複雜的計算技巧，不過當出現了看似簡單的動作，卻反而忘記要做了。這些錯誤通常被當作粗心看待。

(2)學生試卷② (受試者編號 05)


4. 計算：$4^{\log_2 3}=$ 8 。
$2^{2\log_2 3}$
$2^{2\times\frac{3}{2}}$
$2^3=8$

(i)分析原因：「對數基本意義與符號不清楚」。
(ii)探討：學生在晤談過程中，毫無邏輯的解釋他的做法，而這個做法很顯然能看出他完全不懂 *log* 這個符號存在的意義。

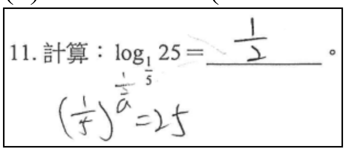
(3) 學生試卷③(受試者編號 02)


6. 計算：$\log_2 96-\log_8 27=$ 32 。

$\dfrac{\log_2 96}{\log_2 3}=32$

(i)分析原因：「對數運算問題」：對數減法公式混淆。
(ii)探討：由對數減法運算可知：$\log_a s-\log_a t=\log_a \dfrac{s}{t}$，而這是一個很容易被學生誤用的對數減法公式，他們容易將口訣「log 相減，真數相除」就誤認為可以直接將兩個 log 相除，所以時常在對數減法時發生錯誤，而後的計算邏輯也時常被打亂，這也是學生對對數的一種運算迷思。

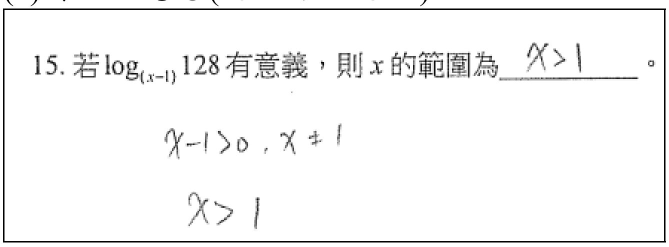
(4) 學生試卷④(受試者編號 23)


11. 計算：$\log_{\frac{1}{5}} 25=$ $\frac{1}{2}$ 。

$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{a}}=25$

(i)分析原因：「指數運算問題」：指數律公式使用錯誤。
(ii)探討：學生了解對數之的定義，但卻因為指數的換算而出現錯誤。在對數運算的題目中，因指數運算而錯誤的例子相當的多，尤其在分數、根號、及小數點的錯誤層出不窮。

(5) 學生試卷⑤(受試者編號 10)


15. 若 $\log_{(x-1)} 128$ 有意義，則 x 的範圍為 $x>1$ 。

$x-1>0$, $x\neq 1$

$x>1$

(i)分析原因：「其他」：口訣混淆。
(ii)探討：此例為背口訣上出現錯誤。學生背的口訣是正確的，但卻使用錯誤了。學生先算出底數大於零的結果為 $x>1$，並誤將此結果套用在「底數不等於 1」，所以得到錯誤的答案。

根據以上晤談資料，研究者分析出高中學生在「對數」單元中出現的錯誤原因有以下六項：

(1)先備知識不足：
很多學生容易在指數運算中出錯，而指數是學習對數前須熟練的課題。

(2)對對數的觀念不清楚：
對於對數符號的意義、真數及底數的區分，書寫的正確位置、對數與指數之間的關係，很多學生只會死背，不太清楚怎麼使用。

(3)對數運算性質的混淆：
學生時常錯誤使用對數公式，除了不懂得公式的用法，或使用了不恰當的公式，亦常常自己透過推論而無中生有新的公式數學。

(4)對數限制的忽略、錯記：
學生無法確實記住對數的限制、條件，時常被搞混，而遺漏或誤加錯誤條件。

(5)口訣的誤導：
學生時常口訣背不完整，加上對對數的公式不清楚，相當容易誤用。例如:「兩對數相減，真數相除」出錯率尤其高。

(6)數學基本運算問題：
學生在數學計算上本就時常出錯，當加入了新的對數符號，更混淆了學生對算式的運算。

6. 結論與建議

6.1 錯誤類型

(1)在「不會或未完成」的類型中：
(i)作答欄完全空白。
(ii)只是將 log 符號寫出並作無邏輯性作答。
(iii)未將答案化簡完成。

(2)在「對數基本意義與符號不清楚」的類型中：
(i)指對數轉換不清楚。
(ii)對數的真數、底數限制混淆或不清楚。
(iii)運算時自行省略或任意改變對數符號。

(3)在「對數運算問題」的類型中：
(i)對數運算不清楚，以下公式時常混淆：
①對數減法：$\log_a s - \log_a t = \log_a \dfrac{s}{t}$ 發生錯誤。
②換底公式：$\log_t s = \dfrac{\log_a s}{\log_a t}$ 發生錯誤。
③特殊公式：$a^{\log_a b} = b$ 發生錯誤。
(ii)自行臆測公式、創造公式，如以下錯誤範例：
①兩對數相乘：$\log_a s \times \log_b t = \log_{a\times b} s \times t$

②兩對數相除：$\frac{\log_a s}{\log_a t}=\frac{s}{t}$ 、$\frac{\log_a s}{\log_a t}=\log_a \frac{s}{t}$ 或 $\frac{\log_a s}{\log_a t}=\log_a s-\log_a t$

③兩對數相減：$\log_a s-\log_a t=\frac{\log_a s}{\log_a t}$

(4)在「指數運算問題」的類型中：
(i)先備知識不足，指數學習成效不佳。
(ii)指數律計算出錯。
(iii) 負數指數，分式指數轉換出錯。

(5)在「其他」的類型中：
(i)先備知識不足：
①不等式計算錯誤。
②解方程式發生錯誤。
③小數轉換科學記號發生錯誤。
④基本四則運算發生錯誤。
(ii)計算時遺漏對數符號，或遺漏底數，或答案只寫真數值。

6.2 錯誤原因

研究者透過與學生的半結構性晤談，將晤談資料整理後、分析出台南地區學生在「對數的意義與對數的運算」測驗中發生錯誤的原因有以下幾點：
(1)運算能力不佳或容易粗心，包含基本四則運算、方程式運算、不等式運算、科學記號轉換等，皆容易出錯。
(2)先備知識不足，尤其在指數概念及運算的不足。
(3)對數符號存在的意義不清楚，導致計算時容易誤用、或忽略對數符號。
(4)對數觀念不清楚。
(5)忽略、遺漏或忘記附加條件。
(6)學生自行想像對數計算公式。
(7)對數公式混淆。
(8)教學口訣錯誤影響，如「兩對數相減、真數相除」誤解為「相減則相除」、或對數限制：「真數大於 0，底數大於 0 且不等於 1」導致計算對數限制時出現錯誤。

6.3 研究建議

根據本研究結果，研究者在「數學教學」及「未來研究」兩方面提出建議，分別敘述如下：

6.3.1 數學教學建議

(1)在學生第一次接觸「對數」前，先加強學生的先備知識，尤其是指數計算及科學記號轉換，以減低學生因先備知識不足而早成學習成效不佳。可先針對指數及科學記號部分，給學生評量，以確定他們的先備知識足夠，而在教授對數的過程中，若遇到指數步驟，也不要忽略，仍需詳細講解，以增加學生對指數計算的熟練度。

(2)研究結果發現，很多學生死背公式，也有很多學生自行創造公式，學生容易用「背」的方式學習對數，因此當題型發生變化後，便容易發生許多錯誤。建議老師在教「對數」這個單元時，多強調指數與對數之間的緊密關係，多說明公式來源，增加學生對公式的印象。而在教學生解題時，再多強調公式的模樣，避免不痛不癢的代公式，在每次代公式時，強化正確公式在學生中的印象。
(3)對數是一個新的概念，初期須好好地建立這個符號意義，而後期則須強化對數在學生心中的正確印象。當已將對數概念及公式交給學生之後，為了檢視他們是否還保有正確觀念，上課可時常提問請學生回答，或者定時做小範圍評量，以便調整教學方法及進度。
(4)老師教學時時常都有口訣的搭配與輔助，而研究者發現在對數這個單元時常發生學生誤用口訣。因此在使用口訣教學時，須特別強調口訣搭配的公式模樣，也須時常檢視學生學習的效果及可能發生錯誤的地方。
(5)研究者發現，當學生在進行只需對數單一運算公式就可以解決的題型時，大多數人都可以正確地使用公式且順利解題，但是當遇到需要混和多個不同公式運算之綜合題型時，卻反而將本來會的公式錯誤使用，又搭配自創的錯誤公式，使得無法正確解出。本單元多數的題型都需要正確地搭配不同的對數運算公式，所以在進入到綜合題型之前，務必先將加強學生對對數公式的熟練度，避免學生遇到運算時，自我混淆，使用錯誤公式。

6.3.2 未來研究建議

(1)本研究只針對台南市某地區之其中一所普通高中做研究，並未考慮到城鄉差距、不同年級、不同學制（普通高中、綜合高中、完全中學、私立高中職等）或不同性別的學生。所以未來可以針對市中心或偏遠地區的學校，比較兩種地區學校對本單元的解題狀況、錯誤類型及可能的錯誤原因；或針對不同學制的學生（例如：高中及高職）在本單元的解題狀況、錯誤類型及可能的錯誤原因。
(2)本研究只探討學生在學習上產生的解題狀況、錯誤類型及可能發生錯誤的原因，並未將教師的教學因素以及學生的學習動機或學習態度加入考量。因此，建議未來研究可以探討教師在本單元使用不同的教學方法，對學生發生的解題狀況、錯誤類型及可能發生的錯誤原因所造成的影響，或不同教學法在本單元對學生的學習動機及學習態度之影響。
(3)本研究只針對本單元中「對數的意義與基本概念」及「對數的運算及化簡」兩大部分做錯誤分析，並未考慮學生在對數應用題上的解題狀況、錯誤類型及可能發生的錯誤原因，所以建議未來研究可以探討學生在對數應用題中對數運算所產生的解題狀況、錯誤類型及可能發生的錯誤原因。

致謝

進入台南大學進修的這兩年，我的人生變化相當大，碩一時還在台南地區高中任教，碩二時便介聘回高雄地區的高中，又從導師職位變為訓育組長職位，工作性質大變、工作量也激增。我很慶幸在這段時間遇見一同進修的這群人，這群人性格善良，為人熱心，跟著他們一起努力學習、完成學位，我很滿足。

這兩年來，非常感謝系上教授與一起努力、合作的同學們，尤其對台南大學數學系黃建中教授特別感激。是他，不遺餘力的指導及督促著我們的論文；是他，時不時地在我們耳邊提醒著論文繳交時間快到了；無論我們是否感到壓力、不管心情愉快或鬱悶，總是給予我們溫暖的關心及生活小趣事的人，也是他。很高興地，在我的生命中，又添加了一位恩師。

與我一起在工作之餘掙扎論文的同學們，互相扶持、互相鼓勵，才能讓我有持續努力的動力，也很開心看見大家也都一步一步將論文完成，通過口考，離畢業越來越近。最重要的是謝謝家人、朋友與伴侶的支持與陪伴，大家都能同理完成論文是又長又遠的一條路，需要犧牲很多私人的時間，大家的尊重與包容，亦是支持我的一股力量。

最後，我想感謝我自己，除了外來的刺激與鼓勵，也很感謝自己這段時間的堅持，發揮出強大的毅力與專注力，方能順利完成目標！要是減肥也有這般心態就好了呢，真是的！

參考文獻

[1]田万海(1992)。**數學教育學**。浙江：教育出版社。

[2]石函早與胡俊山(2007)。**數學概念教學中的錯誤概念問題**。中國雲南保山師專學報，26.2，46-49。

[3]呂溪木(1983)。**從國際科展看我國今後科學教育的發展方向**。科學教育月刊，第 64 期，13-19。

[4]吳宜真(2012)。**高一學生對數概念與運算之錯誤類型分析研究**。國立高雄師範大學，高雄市。

[5]胡炳生(1994)。**數學解題思維方法**。九章出版社。

[6]陳麗玲(1993)。**國小數學學障學生計算錯誤類型分析之研究**。國立彰化師範大學特殊教育研究所碩士論文。未出版，彰化。

[7]郭麗玉(2002)。**數學史 第一卷：算術、代數與數論**。台北：協進圖書有限公司。

[8]張景媛(1994)。**數學文字解題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究**。國立臺灣師範大學教育心理與輔導學系教育心理報，27，175-200。

[9]張春興(1994)。**教育心理學**。台北：東華書局。

[10]教育部(2010)。普通高級中學必修科目「數學」課程綱要。台北。教育部。

[11]黃台珠(1984)。概念的研究及其意義。**科學教育月刊**，66，44-55。

[12]鄭惟厚 譯(Eli Maor 著)(2000)。**毛起來說 e**。台北：天下文化。

[13]潘宏澧(2016)。**台南地區高中學生對空間中直線方程式的錯誤類型分析**。國立台南大學，台南市。

[14]謝育博(2012)。**高一學生在「對數與對數運算」單元中之錯誤類型分析**。國立台南大學，台南市。

[15]Cox, L. S.（1975）.Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations.*Journal for Research in Mathematics Education*,6,202-220.

[16]Engelhardt, J. M.（1982）.Using computational errors in diagnostic teaching.*Arithmetic Teacher*,29（8）,pp.16-19.

[17]Gagné, E. D.（1985）.The cognitive psychology of school learning.Boston:Little,Brown and Company.

[18]Ashlock, R. B（1986）.*Error patters in computation:A semiprogrammed Approach(4th ed)*.Columbus,OH:Merrial.

[19]Lester, F. K. (1980).*Reasearch on mathematical ploblem solving.* In R.J. Shumway (Ed.), Research in mathematics education. The National Council of Teachers of Mathematics.

[20]Lester, F. K.（1989）.*The role of metacognition in mathematical problem solving:A study of two grades seven classes*.（ERIC No. ED 314225）.

[21]Lester, F. K., & Garofalo, J.（1982）.Metacognitive aspects of elementary school Students' performance on arithmetic tasks.*Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association*,New York.

[22]Mayer, R. E.（1985）. Educational Psychologh：*Cognition Approach.* NY：Freeman.

[23]Mayer, R. E. (1987）*Educational Psychology ：A Cognition approach. Boston*：Little, Brown and Company.

[24]Radatz（1979）.Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 10,*163-172.

[25]Polya, G.（1945）. *How to solve it*. Princeton, New Jersey：Princeton University Press.

[26]Schoenfeld, A. H.（1985）.Teaching problem-solving skills.Americam Mathematical monthly,87（10）,794-805.

[27]Skemp , R. R.(1979). Goals of learning and qualities of understanding.

[28]Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teaching*, 26(3), 9~15.