International Journal of Science and Engineering
http://www.scieng.nutn.edu.tw/ch/item.php
International Journal of Science and Engineering (issued by NUTN) Vol.9 No.1(2019):85-102

An Analysis of Error Patterns in Junior High School Ninth-Grade Students' Performance of Circumcenter, Incenter and Triangle Centroid

Po-Lin Hsu[1*], Chien-Chung Huang[2] and Chang-Hong Wu[3]

[1]Tainan Municipal Houjia Junior High School, Tainan, 70165, Taiwan
[2,3]Department of Applied Mathematics, National University of Tainan, Tainan, 70005, Taiwan

[*]E-mail : 2004hpl@tn.edu.tw

Abstract

This research mainly aimed to understand ninth-grade students' basic comprehension of Circumcenter, Incenter and Triangle Centroid and how they solved problems, analyze the error patterns in their performance of Circumcenter, Incenter and Triangle Centroid, investigate the possible reasons of their errors. The research method combined surveys and interviews. The sample included twenty eight ninth-grade students from a class in a junior high school in East District, Tainan City. Applying "achievement test", a paper-based test developed by the researcher, to the Circumcenter, Incenter and Triangle Centroid session, this research investigated students' performance in the achievement test and the errors in their performance. The error patterns were generalized from the result of the achievement test. Ultimately, the researcher conducted interviews with students to further understand the possible reasons for the errors they made in the achievement test. The main results were: first, the overall error rate was over fifty percent. The highest error rate occurred in Circumcenter, followed by that of Incenter, with that of Triangle Centroid the lowest. Next, there were seven error patterns in students' performance of Circumcenter, Incenter and Triangle Centroid. In the end, there were five possible reasons for students' errors in their performance of Circumcenter, Incenter and Triangle Centroid.

Keywords: Circumcenter, Incenter, Triangle Centroid, Error Patterns, Ninth-Grade Students

----
* Corresponding author:2004hpl@tn.edu.tw
DOI：10.3966/2223448920190400901007

國中九年級學生三角形的外心、內心與重心單元錯誤類型之分析研究

許博琳 [1,*] 黃建中 [2,] 吳昌鴻 [3]

[1] 臺南市立後甲國民中學, 臺南, 70165, 臺灣
[2,3] 國立臺南大學應用數學系, 臺南, 70005, 臺灣

[*] E-mail : 2004hpl@tn.edu.tw

摘要

本研究的主要目的是瞭解國中九年級學生在三角形的外心、內心與重心單元的解題狀況，並歸納解題的錯誤類型，進一步探討解題的錯誤可能形成原因。研究採問卷和晤談的方式進行，以臺南市東區一所國中的九年級學生二十八名為研究樣本。藉由自編的成就測驗，以紙筆測驗調查解題狀況，根據測驗結果歸納出錯誤類型，並以晤談的方式瞭解解題錯誤的可能原因。本研究的主要結果為：全體錯誤率過半，外心錯誤率最高，內心錯誤率次之，重心錯誤率最低；根據測驗及晤談結果共歸納出七種錯誤類型及五種錯誤可能形成原因。

關鍵詞：三角形外心、三角形內心、三角形重心、錯誤類型、國中九年級學生

1. 前言

數學是人類理性文明的結晶，是一門講道理的學問。無論是教與學，都應展現從問題出發的思索、討論、說理之過程（蔡聰明，2010）。英國自二十世紀以來就深切體認數學應在學校教育中占有主要地位，其中，幾何應以一定形式在廣泛的數學課程中擔綱重要角色，理由有三：（1）延伸空間意識（to extend spatial awareness）：所謂空間意識儘管相當模糊，但卻是與感知、操作幾何物體有關之重要觀念。（2）發展推理的技巧 （to develop the skills of reasoning）：數學，特別是幾何，廣為週知是學校課程中可貴的部分，因為幾何提供發展學生推理能力的脈絡素材。（3）刺激、挑戰和告知（to stimulate, challenge and inform）：幾何是一門本質有趣的學科，值得我們從事以領略其美與知性的形式，此外，關於我們所在世界的許多方面上，幾何皆是發展背景知識的一環（French, 2004）。

由於國內國中數學第五冊在教材內容編排上，皆以三角形的外心、內心與重心單元作為國中學生學習數學推理與證明的最後章節，課程難度較高，學生學習上往往遭遇挫折，學習成就表現不佳。研究者對於學生為何在學習上普遍面臨困難，以及如何提升學生的學習成效一直深感疑惑。但就目前實證研究成果側重以教學實驗提升學習成效來評估（魏淑卿，2003；蔡榮修，2007；李瑞林，2009；王俊宇，2012；翁敏傑，2015；陳子儀，2015），關於國中九年級學生對三角形的外心、內心與重心學習成效的研究需要更多學生質性的資訊，本研究從學生的錯誤類型出發，瞭解學生對三角形的外心、內心與重心的錯誤可能形成原因，再配合文獻中量化研究的結果，對未來後設認知提供更好的研究平台，同時也對未來的教學，提出更優質化的教學參考。

2. 數學解題歷程

2.1 Polya 數學解題歷程

在《How to Solve It》一書中，Polya（2004）開宗明義將數學解題歷程分成四個相互關聯的步驟：（一）理解問題（understanding the problem）（二）擬訂計畫（devising a plan）（三）實行計畫（carrying out the plan）（四）回顧解答（looking back）。Polya 的四個相互關聯的步驟，並非單向進行，而是視解題情況適時返回其他步驟，以動態、循環的方式反覆進行，直到完成解題（Wilson, Fernandez, & Hadaway, 1993）。

2.2 Schoenfeld 數學解題歷程

Schoenfeld（1985）提出一個分析數學行為的理論架構，引介了四類知識和行為：資源（Resources）、啟發法（Heuristics）、控制（Control）、信念系統（Belif system）。Schoenfeld 以流程圖的形式說明解題過程的五個主要階段：（一）分析（analysis）（二）設計（design）（三）探討（exploration）（四）執行（implementation）（五）驗證（verification）。解題時遭遇的主要或次要的困難發生於設計與探討兩階段互動過程中，若有必要，需透過更合宜的相關問題或新資訊，再次將給定問題重新分析進行解題。

2.3 Mayer 數學解題歷程

Mayer（1987）提出學生解決數學問題的四個組成元素（component）及其對應解題需知知識。（一）問題轉譯（problem translation）：解題初步是將問題中的每一個陳述轉

譯成某些內在表徵（internal representation），轉譯過程中需要語言知識（linguistic knowledge）與事實知識（factual knowledge）。（二）問題整合（problem integration）：解題時亦需要將數個陳述整合成一個整體連貫的表徵（coherent representation）。為了理解與整合問題，過程中需要基模知識（schematic knowledge）以辨認問題的類型。（三）解題計畫和監控（solution planning and monitoring）：設計與監控解題的計畫是解決數學問題的最關鍵組成元素，過程中需要策略知識（strategic knowledge）。（四）解題執行（solution execution）：最後透過加減乘除等的計算程序而得到問題的解答，過程中需要程序知識（procedural knowledge）。Mayer（1992）對數學解題的分析將上述四個組成元素（component）分成問題表徵（problem representation）與問題解法（problem solution）兩個階段，問題表徵包含問題轉譯及問題整合，問題解法包含解題計畫和監控及解題執行，將認知心理學及學習理論統整至數學解題歷程之中。

2.4 啟發法解題歷程

Stephen Krulik 與 Jesse A. Rudnick 於 1996 年出版的《The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High School》一書中指出問題解決的技巧是能教授且應該教授的，二位學者將解題過程分析成一系列的步驟及其下的子技巧，稱為啟發法計畫（heuristic plan）或簡稱為啟發法（heuristics）（馬秀蘭，2009）。解題過程分為五個既獨立又連貫的步驟：（一）閱讀與思考（Read and Think）（二）探索與計畫（Explore and Plan）（三）選擇策略（Select a Strategy）（四）找出答案（Find an Answer）（五）反省與擴展（Reflect and Extend）。

綜合上述，數學解題的歷程無論以階段或步驟來解構，還是以元素或技巧來分析，其多向關聯性的動態歷程發展是探討解題歷程時最難以一窺究竟之處。因此，若想瞭解學生的解題歷程，題目的型式宜以非選題型呈現。而題目以一題一概念或一性質的方式設計較能聚焦於測驗學生對單一概念或性質的瞭解。也應安排合適且充分的解題作答時間，避免時間不足而致學生胡亂猜測。此外，若能在測驗後針對作答狀況個別晤談，應能更完整地瞭解學生的解題歷程。

3. 錯誤類型文獻研究

在數學計算式中發生錯誤的步驟，根據其錯誤的關鍵以區分成數種類型，稱為錯誤類型（Kathleen, 1987）。「從錯誤中學習」在數學教育中格外重要。教師應多注意、累積並分享學生犯錯的常見模式，有時這反映了教師本身的教學偏失，有時反映了學生年齡階段的認知困難。熟悉常見錯誤絕對有助於教師改善教學以及與學生的溝通（翁秉仁，2015）。研究者參考並整理幾何相關課程單元的錯誤類型文獻，如表一及表二。

表一 錯誤類型文獻Ⅰ

九章出版社（1995） 《錯解辨析》 錯誤分類	黃上豪（2004） 國三學生 圓單元	李建德（2009） 國三學生 圓單元
概念不清產生錯誤	定義認知方面的錯誤	粗心疏忽
推理無據產生錯誤	混淆相似概念的錯誤	無法理解題意
忽視條件產生錯誤	猜測或無據的推論	基本觀念不足或錯誤
考慮不周產生錯誤	對題目的條件認知不足	公式使用錯誤
	粗心疏忽的錯誤	猜測或無據的推理
		先備知識不足或錯誤
		認為條件不足

表二 錯誤類型文獻Ⅱ

趙文源（2010） 國三學生 平行與截線概念	黃昭智（2011） 國三學生 三角形的全等單元	趙千翔（2012） 國三學生 相似形單元
定義認知方面的錯誤	定義認知方面的錯誤	不瞭解題意或圖形的述敘
代數運算錯誤	混淆相似概念的錯誤	先備知識不足
混淆相似概念的錯誤	猜測或無據的推論	定義、性質或公式的概念有誤
猜測或無據的推論	粗心疏忽的錯誤	將數值代入公式錯誤或計算錯誤
		誤解所求或看錯數值
		對題目敘述或圖形數據作無據的推論
		時間不夠或無心作答

參酌美國「全國教育進展評量（National Assessment of Educational Progress）」將數學能力所區分之三種能力（概念性瞭解、程序性知識及應用解題），研究者將表列錯誤類型大略分為幾種相關類型。概念性瞭解相關，如：定義認知方面的錯誤、混淆相似概念的錯誤、定義性質或公式的概念有誤。其次，程序性知識相關，如：猜測或無據的推論、對題目的條件認知不足、公式使用錯誤、對題目敘述或圖形數據作無據的推論。此外，代數列式求解能力相關，如：代數運算錯誤。數的四則運算能力相關，如：將數值代入公式錯誤或計算錯誤。

4. 研究方法

4.1 研究設計

本研究採問卷和晤談的方式進行。研究者以自編的「三角形的外心、內心與重心」成就測驗為研究工具，對國中九年級學生完成施測後就各題的作答結果逐一進行量化分析。並進一步，採用半結構式個別晤談方式蒐集質性資料，希望從個別晤談分析中瞭解國中九年級學生解題的過程、解題的錯誤類型與解題的錯誤可能形成原因。

4.2 研究工具

研究者根據 97 年國民中小學九年一貫課程綱要能力指標及分年細目（教育部，

2008)，參考南一、翰林與康軒三家出版社的國民中學數學三上課本（左台益，2016；張幼賢，2016；洪有情，2016)，依三角形的外心、內心與重心三個向度並就認知三個向度（概念、程序與應用)，各編擬一向度一至二題，共十二題試題，試題的題號與向度內容分布表如表三。擬題後，除和二位高中職數學科教師討論，也徵詢三位國中資深數學科教師的意見，並請教授修正，最後完成預試題目。

表三 試題題號與向度內容分布表

題號	向度	認知	內容
Q1	內心	概念	三角形內心為三角形三內角角平分線之交點
Q2	重心	程序	三角形重心至三頂點連線段將三角形面積三等分
Q3	外心	程序	直角三角形的外接圓半徑等於斜邊長一半
Q4	重心	概念	三角形重心為三角形三中線之交點
Q5	外心	程序	三角形外心至三頂點等距
Q6	內心	程序	三角形兩內角角平分線交角角度與第三角關係
Q7	外心	概念	三角形外心為三角形三中垂線之交點
Q8	內心	應用	三角形內切圓半徑、三角形面積與三角形周長關係
Q9	重心	應用	三角形重心將中線分為 2：1
Q10	內心	應用	直角三角形的內切圓半徑、兩股與斜邊長關係
Q11	重心	程序	三角形三中線將三角形面積六等分
Q12	外心	應用	三角形外接圓內角度關係

註：Qn 表示試題第 n 題。

預試學生為臺南市東區某市立國中的九年級學生一班(臺南市教育局常態 S 型編班)共二十九人，扣除一名預試施測當天缺席的男學生，預試實到國中九年級學生共二十八人，其中男生十三人、女生十五人。預試的各題作答狀況如表四。此表將有效樣本的人數依照測驗分數高低排序，先從最高分向下取約 30％作為高分組（八位)，再從最低分向上取約 30％作為低分組（八位)，其餘約 40％作為中分組（十二位)。

表四 預試試題難度與鑑別度分析表

題號	高分組答對率	低分組答對率	難度	鑑別度
Q1	1.00	0.13	0.56	0.88
Q2	0.88	0.50	0.69	0.38
Q3	1.00	0.00	0.50	1.00
Q4	0.88	0.25	0.56	0.63
Q5	0.75	0.25	0.50	0.50
Q6	1.00	0.00	0.50	1.00
Q7	0.88	0.00	0.44	0.88
Q8	0.88	0.13	0.50	0.75
Q9	1.00	0.13	0.56	0.88
Q10	1.00	0.13	0.56	0.88
Q11	1.00	0.63	0.81	0.38
Q12	0.75	0.00	0.38	0.75

註：Qn 表示試題第 n 題。

測驗的試題鑑別度指標值是愈高愈好，但一般可接受的最低標準至少為 0.25 以上，而整份測驗的平均難度指標值，以接近於 0.5 為挑選原則（余民寧，2011）。預試試題難度介於 0.38 至 0.81 之間，預試試題平均難度 0.55，預試試題鑑別度介於 0.38 至 1.00 之間，預試試題平均鑑別度 0.74，符合一般的測驗試題難度與鑑別度要求。一般而言，Cronbach`s Alpha 值若介於 0.70～0.80，內部一致性為可接受，若介於 0.80～0.90，內部一致性即為優良（George & Mallery, 2009）。一份優良的教育測驗至少應具有 0.80 以上的信度係數值（余民寧，2011）。預試的內部一致性 Cronbach`s Alpha 值為 0.858 有良好信度。

5. 結果分析與討論

5.1 「三角形的外心、內心與重心」之結果分析

正式施測採集體紙筆測驗方式，作答指導說明五分鐘，紙筆測驗四十分鐘，合計四十五分鐘。施測學生為臺南地區某市立國中的九年級學生一班（臺南市教育局常態 S 型編班）共二十九人，扣除一名正式測驗施測缺席的資源班男學生（學習障礙抽離式課程），正式施測實到學生共二十八人，其中男生十五人、女生十三人。

施測結果答對題數從 0 題到 12 題皆發生，其中以答對 3 題、2 題與 0 題相對次數（14.29％）最高，以答對 4 題與 5 題相對次數最低，有 53.58％答對 6 題以下。依全體錯誤率＝(總錯誤題數/全部題數)×100% 計算，全體錯誤率為 54.46％。進一步依照三角形的外心、內心與重心三個向度來統計，在「三角形的外心、內心與重心」成就測驗的答題情形如表五。三個向度中概念性問題的答對相對次數皆是最低，程序性問題的答對相對次數皆是最高。三向度中比較答對相對次數時，結果為程序性問題優於應用性問題，應用性問題又優於概念性問題。若以算術平均計算並比較整體答對率，則重心答對率優於內心答對率，內心答對率又優於外心答對率。

表五 答對次數分配與相對次數分配表

內容	認知	題號	答對次數(人)	答對相對次數(%)
外心意義	概念	Q7	7	25.00
性質	程序	Q3	16	57.14
性質	程序	Q5	8	28.57
性質	應用	Q12	10	35.71
內心意義	概念	Q1	12	42.86
性質	程序	Q6	16	57.14
性質	應用	Q8	12	42.86
性質	應用	Q10	14	50.00
重心意義	概念	Q4	7	25.00
性質	程序	Q2	17	60.71
性質	程序	Q11	18	64.29
性質	應用	Q9	16	57.14

註：Qn 表示試題第 n 題。

施測結果全體過半數僅答對六題以下，顯見學生在「三角形的外心、內心與重心」單元的學習確實有待加強；整體答對率中，重心優於內心，內心又優於外心，恰與教材

內容介紹順序先外心、次內心、後重心之排列顛倒，學生是否因遺忘而導致此狀況有待研究；比較答對相對次數時，出現程序性問題優於應用性問題，應用性問題又優於概念性問題的狀況，可見學生普遍輕忽基本概念的學習。

5.2 「三角形的外心、內心與重心」之錯誤類型

研究者藉由分析學生在「三角形的外心、內心與重心」成就測驗的作答結果來歸納整理學生解題時的錯誤類型。以「三角形的外心、內心與重心」成就測驗第 1 題錯誤情形為例，總計有 15 位學生作答錯誤，錯誤情形如表六。四種錯誤情形，依發生之相對次數多寡依序舉例如圖 1、圖 2、圖 3 及圖 4 所示。最後，研究者將學生在「三角形的外心、內心與重心」成就測驗的所有錯誤情形歸納為七種錯誤類型，

表六 「三角形的外心、內心與重心」成就測驗第 1 題錯誤分析統計表

編號	錯誤情形說明	錯誤人數	相對次數(%)
1	誤答為三角形重心	7	46.67
2	未說明理由	4	26.67
3	誤答為三角形中心	3	20.00
4	理由說明錯誤	1	6.67
「三角形的外心、內心與重心」成就測驗第 1 題錯誤人數總計：15 人			

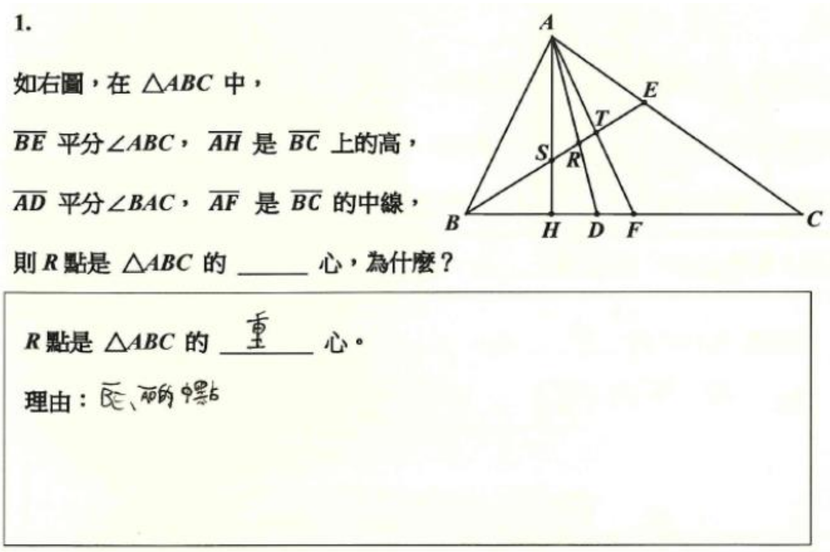
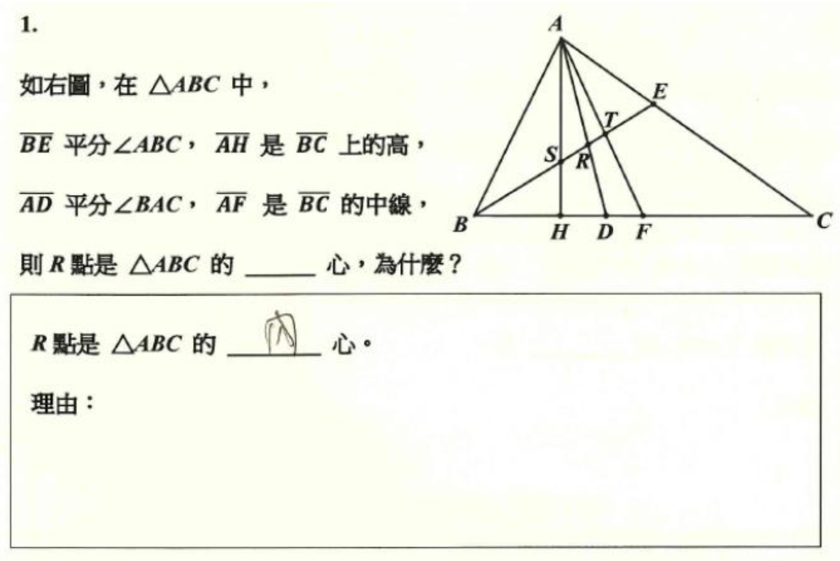


圖 1 誤答為三角形重心



1.

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{BE}$ 平分 $\angle ABC$， $\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，

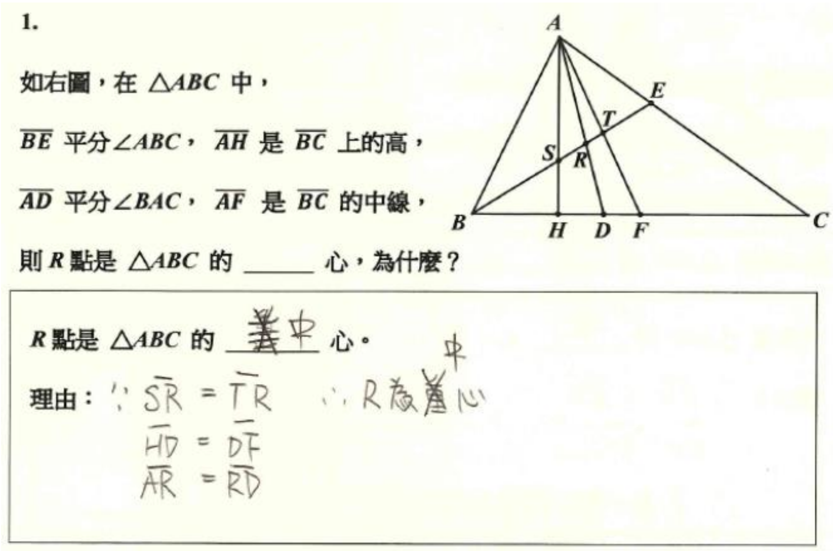
$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$， $\overline{AF}$ 是 $\overline{BC}$ 的中線，

則 R 點是 $\triangle ABC$ 的 ______ 心，為什麼？

R 點是 $\triangle ABC$ 的 __內__ 心。

理由：

圖 2 未說明理由



1.

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{BE}$ 平分 $\angle ABC$， $\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，

$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$， $\overline{AF}$ 是 $\overline{BC}$ 的中線，

則 R 點是 $\triangle ABC$ 的 ______ 心，為什麼？

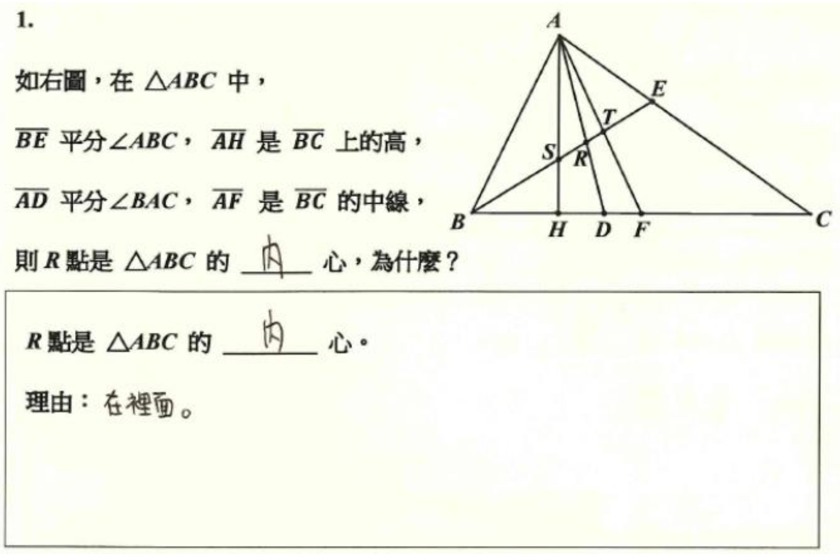
R 點是 $\triangle ABC$ 的 __~~重~~中__ 心。

理由：∵ $\overline{SR}=\overline{TR}$ ∴ R為~~重~~中心

$\overline{HD}=\overline{DF}$

$\overline{AR}=\overline{RD}$

圖 3 誤答為三角形中心



1.

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，

$\overline{BE}$ 平分 $\angle ABC$， $\overline{AH}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，

$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$， $\overline{AF}$ 是 $\overline{BC}$ 的中線，

則 R 點是 $\triangle ABC$ 的 __內__ 心，為什麼？

R 點是 $\triangle ABC$ 的 __內__ 心。

理由：在裡面。

圖 4 理由說明錯誤

5.2.1 無法解決概念性問題

無法解決概念性問題係指學生混淆了三角形的外心、內心與重心之定義，除出現定義之間的錯誤引用而致無法正確解題外，也包含將性質誤為定義使用的錯誤情形，如圖 5 所示。

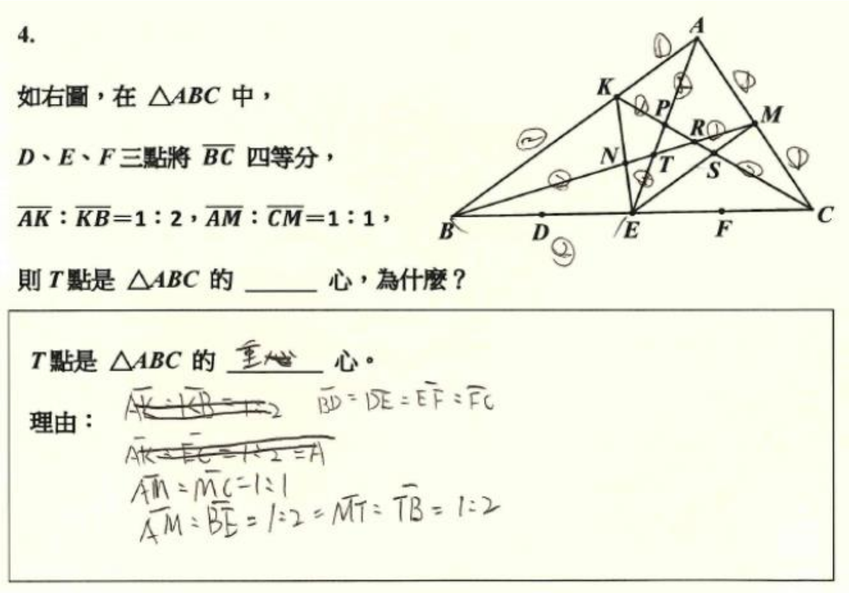


圖 5 無法解決概念性問題

5.2.2 無法解決程序性問題

無法解決程序性問題係指學生無法正確解出三角形的外心、內心與重心之程序性問題，除性質的使用出現錯誤外，也包含誤用其他無關之幾何性質，如圖 6 所示。

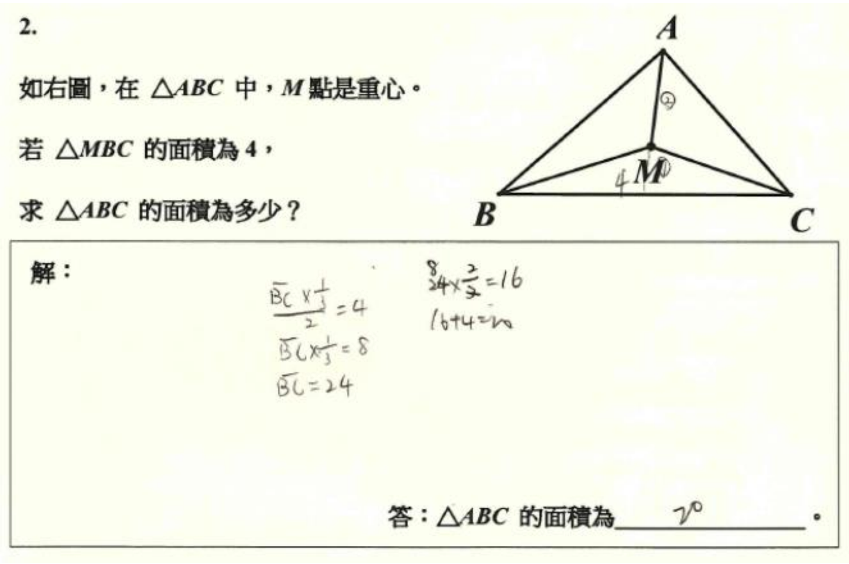
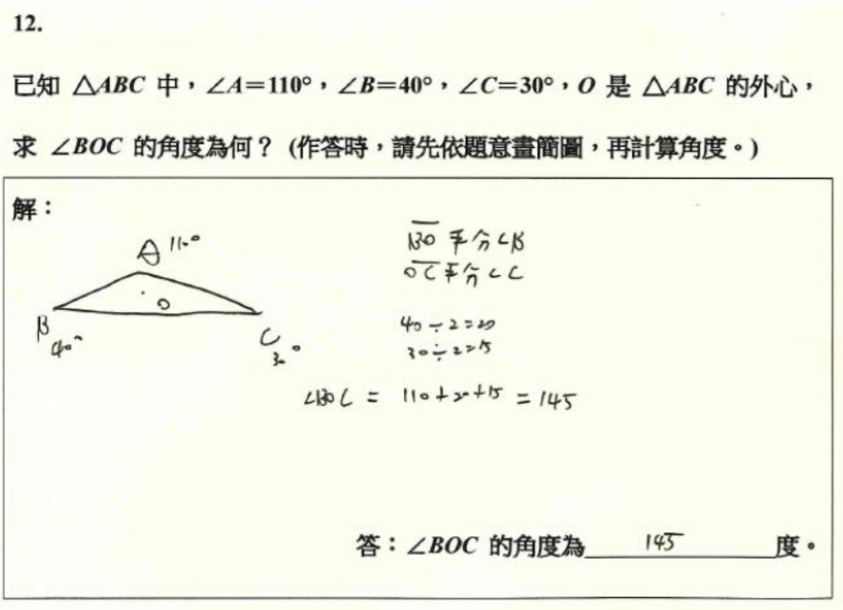


圖 6 無法解決程序性問題

5.2.3 無法解決應用性問題

無法解決應用性問題係指學生無法正確解出三角形的外心、內心與重心之應用性問題，除性質的使用出現錯誤外，也包含誤用其他無關之幾何性質，如圖 7 所示。


12.

已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=110°$，$\angle B=40°$，$\angle C=30°$，O 是 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BOC$ 的角度為何？（作答時，請先依題意畫簡圖，再計算角度。）

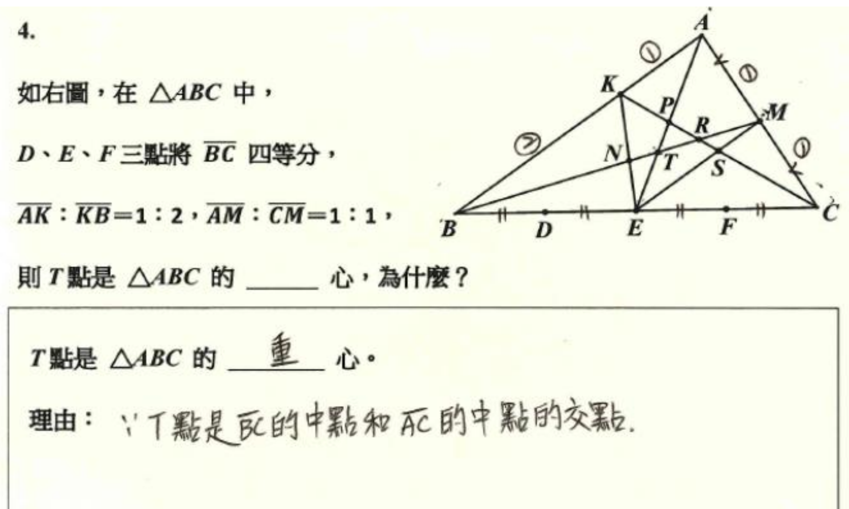
解：

答：$\angle BOC$ 的角度為 145 度。

圖 7 無法解決應用性問題

5.2.4 幾何敘述出現錯誤

幾何敘述出現錯誤係指學生在使用三角形的外心、內心與重心之定義或性質時，文字說明中出現關於幾何專有名詞的敘述不清楚、敘述不完整或敘述不正確，如圖 8 所示。


4.

如右圖，在 $\triangle ABC$ 中，

D、E、F 三點將 $\overline{BC}$ 四等分，

$\overline{AK}:\overline{KB}=1:2$，$\overline{AM}:\overline{CM}=1:1$，

則 T 點是 $\triangle ABC$ 的 ______ 心，為什麼？

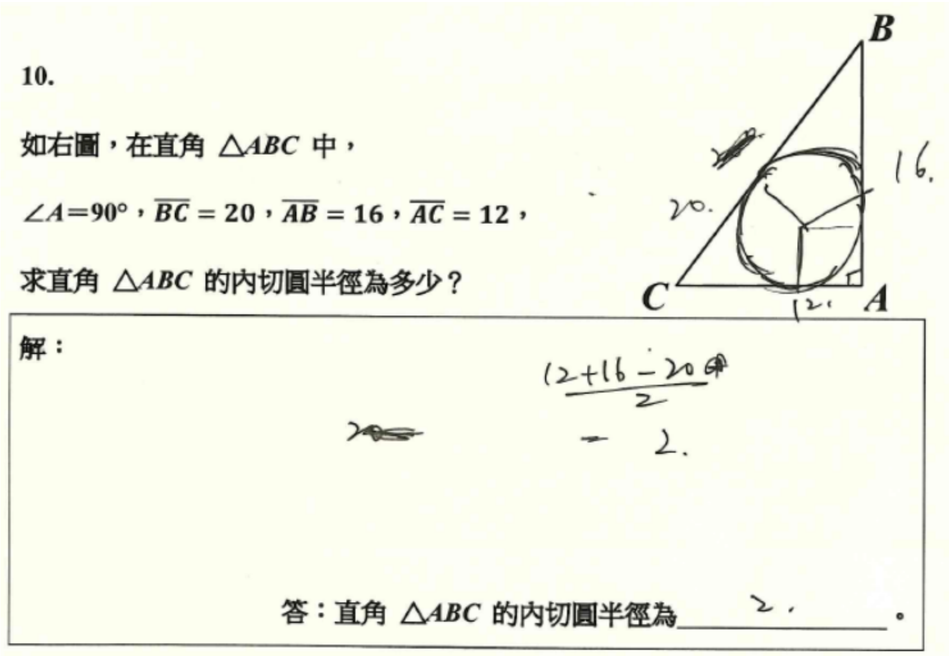
T 點是 $\triangle ABC$ 的 重 心。

理由： ∵T點是$\overline{BC}$的中點和$\overline{AC}$的中點的交點.

圖 8 幾何敘述出現錯誤

5.2.5 基本運算發生錯誤

基本運算發生錯誤係指學生在解題時出現加、減、乘、除四則運算或其他計算上的錯誤，如圖 9 所示。


10.

如右圖，在直角 $\triangle ABC$ 中，

$\angle A=90°$，$\overline{BC}=20$，$\overline{AB}=16$，$\overline{AC}=12$，

求直角 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為多少？

解：

$\frac{12+16-20}{2}$

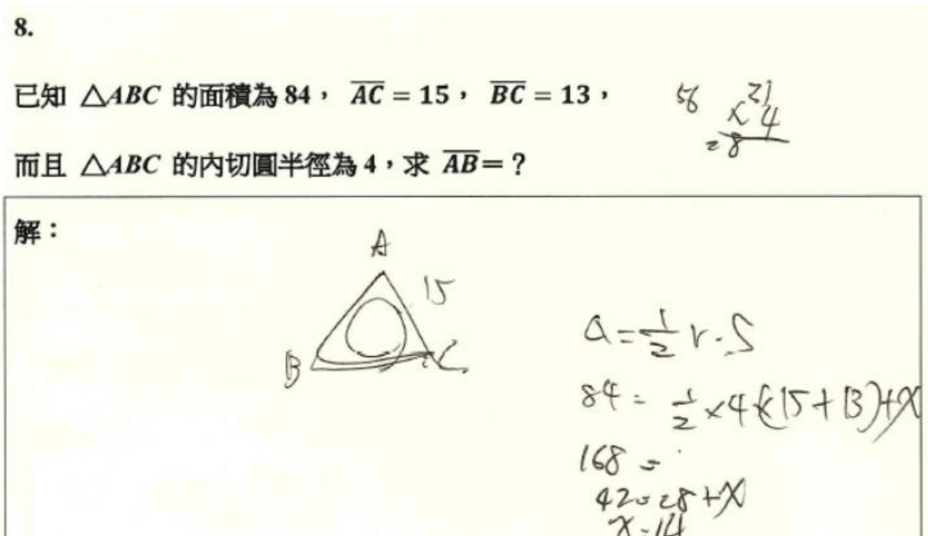
$=2.$

答：直角 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 2. 。

圖 9 基本運算發生錯誤

5.2.6 代數列式發生錯誤

代數列式發生錯誤係指學生在解題時出現代數列式的錯誤或不恰當的符號運算，如圖 10 所示。


8.

已知 $\triangle ABC$ 的面積為 84，$\overline{AC}=15$，$\overline{BC}=13$，

而且 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 4，求 $\overline{AB}=$？

解：

$a=\frac{1}{2}r\cdot S$

$84=\frac{1}{2}\times4(15+13)+x$

$168=$

$42=28+x$

$x=14$

答：$\overline{AB}=$ 14 。

圖 10 代數列式發生錯誤

5.2.7 不會或未完整作答

不會或未完整作答係指學生在解題時不知如何作答或者未依題目要求作答，如圖 11 所示。

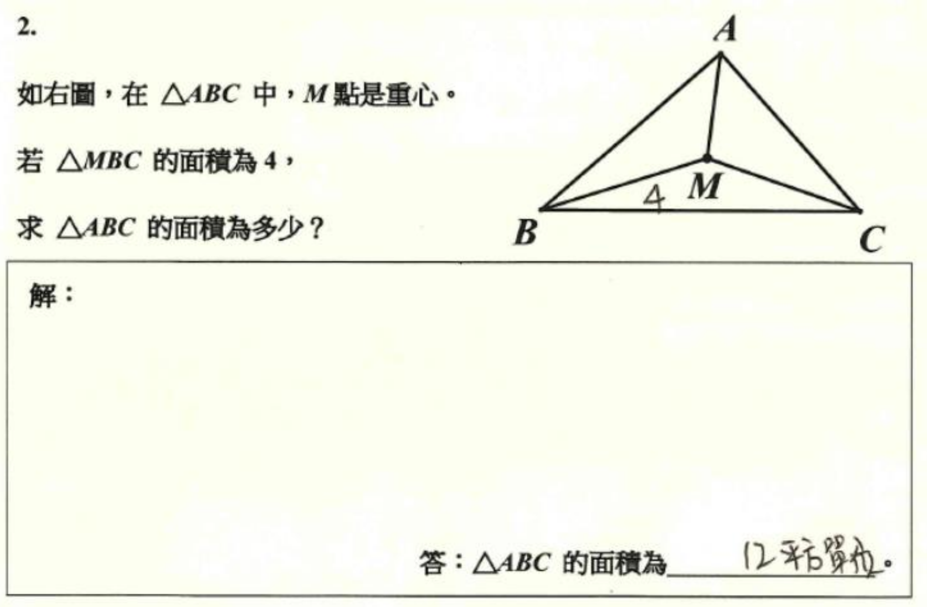


圖 11 不會或未完整作答

5.3 「三角形的外心、內心與重心」之錯誤可能原因

為探討學生在「三角形的外心、內心與重心」成就測驗的錯誤可能原因，研究者透過半結構式晤談來蒐集質性資料。先將正式施測學生依照測驗分數高低排序，從最高分向下取約 30%作為高分組，再從最低分向上取約 30%作為低分組，其餘約 40%作為中分組。其次，考量學生參加晤談意願及口語表達能力，高分組、中分組、低分組各挑選三位以上進行個別晤談來瞭解不同程度學生解題表現與解題的錯誤可能形成原因。

以學生 9B05 成就測驗第 6 題為例，如圖 12 所示。

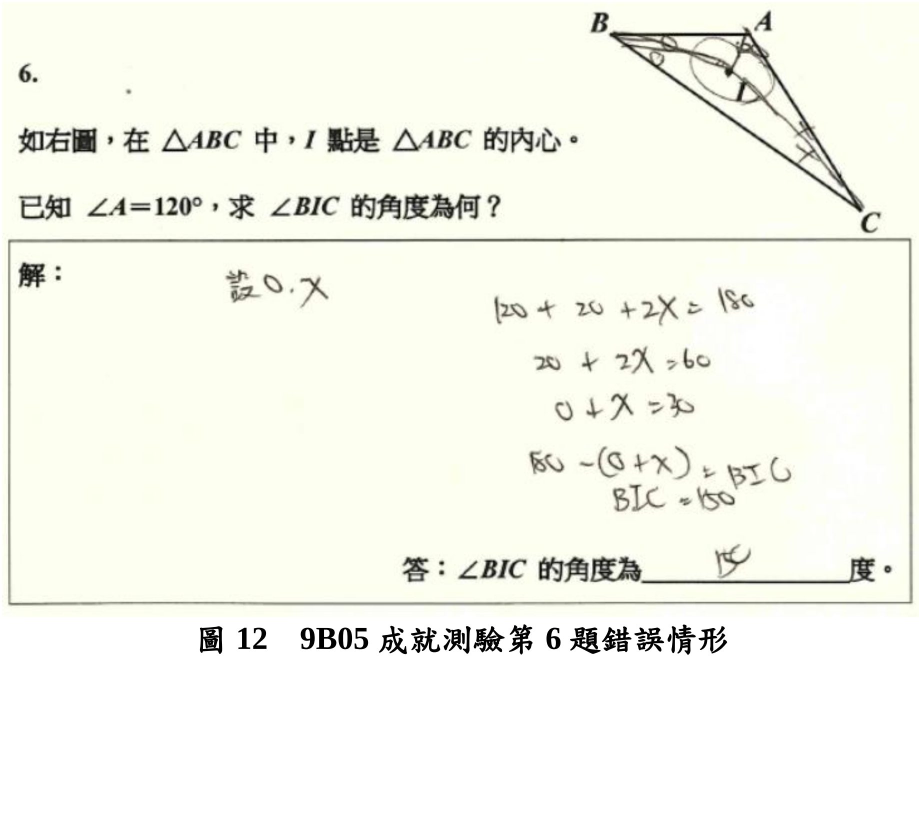


圖 12　9B05 成就測驗第 6 題錯誤情形

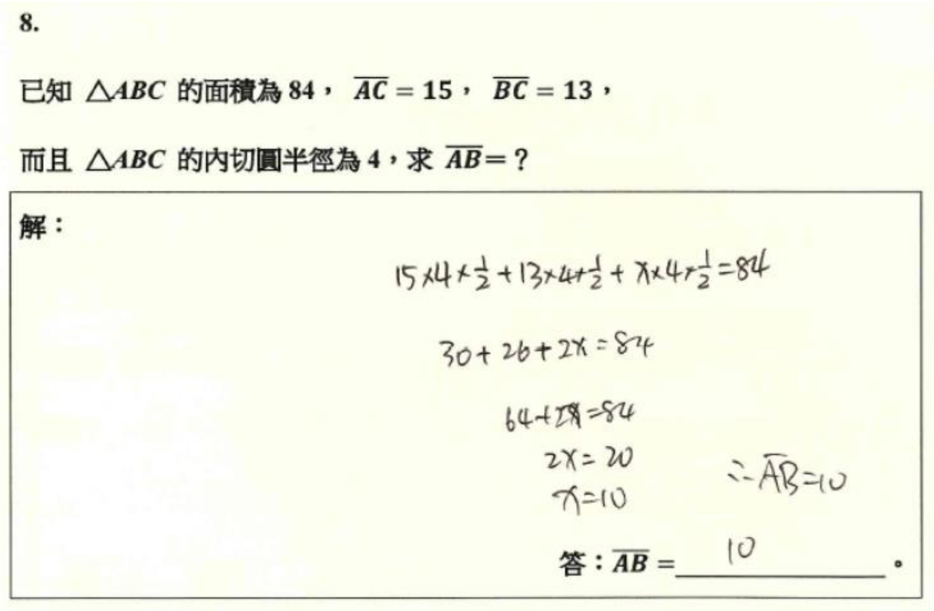
學生 9B05 成就測驗第 6 題晤談內容節錄：

9B05：內心就是平分那個角度…就是角平分線平分出來的…整個三角形是 180 度…那角平分線…就設兩個圈、兩個叉…180 度減 120 等於二圈加二叉所以圈加叉就是 30 度，然後 180 再減。

研究者：你剛好選了兩個比較特別的記號，我們會把圈當成是…

9B05：x 和 y 嗎？喔！當成 20！

以學生 9B09 成就測驗第 8 題為例，如圖 13 所示。


8.

已知 $\triangle ABC$ 的面積為 84， $\overline{AC} = 15$， $\overline{BC} = 13$，

而且 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 4，求 $\overline{AB} = ?$

解：

$15\times4\times\frac{1}{2}+13\times4\times\frac{1}{2}+x\times4\times\frac{1}{2}=84$

$30+26+2x=84$

$64+\cancel{2x}=84$

$2x=20$

$x=10$

$\therefore \overline{AB}=10$

答：$\overline{AB} =$ 10 。

圖 13　9B09 成就測驗第 8 題錯誤情形

學生 9B09 成就測驗第 8 題晤談內容節錄：

9B09：設第三邊為 *x*，然後…內切圓半徑會等於三個邊加起來…三個邊加起來乘以二分之一會等於三角形面積…

研究者：你這邊寫 15 乘以 4 乘以二分之一是要算什麼？

9B09：算 AC…然後那個 ACO…

研究者：那個 O 是？

9B09：內圈那個…內心…

研究者：你那個 64 怎麼來的？

9B09：喔!我好像加錯了！

研究者：應該是？

9B09：56，然後 2*x* 等於 28，*x* 等於 14。

研究者：所以這邊加錯了。

9B09：嗯。

綜合上述兩例及其他學生晤談後發現，解題時學生除了常忽略說明未知數所指為何，或未知數的使用不當之外，列式上也會出現符號誤用的情形，列式時對於代數符號或運算記號的使用並不正確。另外，學生偶有出現加減乘除基本運算的錯誤，導致無法正確解題。最後，研究者歸納出學生在「三角形的外心、內心與重心」成就測驗中，作答錯誤的五種錯誤可能形成原因。

5.3.1 未理解定義與性質

未理解定義與性質係指測驗作答或晤談過程中，學生出現混淆誤用及直覺臆測的狀況，顯然對於三角形的外心、內心與重心之定義與性質並未確實理解及充分精熟。

5.3.2 先備知識的不足

先備知識的不足係指學生對於諸如點、角、線段…等專有名詞的內涵認識不足，測驗作答或晤談過程出現謬誤亦是渾然不覺。

5.3.3 已習教材的干擾

已習教材的干擾係指學生無視題目已知或自以為是的利用已習但不相關的定義與性質解題。

5.3.4 缺乏說理的能力

缺乏說理的能力係指學生對於簡單邏輯的生疏，作答文字陳述中即使出現「因為…所以…」的語句形式，理由說明仍是邏輯不通或有錯漏謬誤。

5.3.5 計算能力的貧乏

計算能力的貧乏係指學生發生基本四則運算或代數列式運算的錯誤，導致無法正確解題。

6. 結論建議與未來展望

6.1 結論建議

如何改善數學成績低落學生的學習表現是值得重視的課題。透過歸納分析，瞭解學生的錯誤類型，進而實施補救教學，修正學生的運算錯誤或迷思概念，是切實可行的模式。研究者希望拋磚引玉，期能對未來學生在「三角形的外心、內心與重心」的學習有所助益。對於教師的教學方面，以下建議提供教師參考。

6.1.1 加強學生基本定義的學習

根據學生作答結果的分析，無論三角形的外心、內心或重心，概念性問題的答對相對次數皆是最低。此外，統計分析學生解題的錯誤情形也頻繁出現錯誤的幾何基本概念，因此教師若能聚焦於加強學生基本定義的學習，應有助於學生提升整體「三角形的外心、內心與重心」單元之學習成效。

6.1.2 增進學生邏輯論述的能力

根據學生作答的錯誤情形分析，理由說明過程出現前後論述的倒果為因。例如：三角形的重心性質，三角形的重心將中線分成線段比為二比一之兩線段，但學生卻以為可將中線分成線段比二比一之兩線段的點即為重心。因此教師教學時，可就此提問來促進

學生對性質的理解及增進邏輯論述的能力，避免解題步驟發生邏輯錯誤。

6.1.3 培養學生解題的後設認知

根據學生的晤談分析，學生解題時缺乏後設認知的思考，純粹臆測而無法進行合理猜想。若能培養學生思考如何解題的後設認知，應有助於學生形塑自己的解題歷程模式以提升解決問題的能力。

6.1.4 調整評量測驗類型或形式

根據學生作答結果的分析，學生可能已習慣於選擇題或填充題的測驗類型，鮮有非選題需清楚說明理由或呈現完整計算過程的練習，因此「三角形的外心、內心與重心」成就測驗全體錯誤率超過百分之五十。然而此單元有豐富的幾何內容可供教師作為調整評量測驗類型或形式的素材，透過評量類型或形式的改變來瞭解學生在學習上的盲點與不足，更可供後續補救教學參考。

6.1.5 提升數與代數的運算能力

根據學生作答結果與晤談分析，國中七年級學生所應具備的數與代數之基本運算能力，即便已是國中九年級學生卻仍有不足，存在著不小進步空間。若教師能輔導學生提升運算的能力，應可大大改善單純因計算錯誤而致解題錯誤的情形發生。

6.2 未來展望

本研究只針對臺南市東區某一所市立國中九年級學生，並未考慮到城鄉差距、不同性別、公私立學校等差異，所以建議未來研究可針對上述差異擴展研究樣本規模。此外，因為十二年國教的改革落實，未來國中九年級學生即將面臨 108 新課綱的實施，雖然三角形的外心、內心或重心的學習內容大柢不變，但是因應新課綱的課程章節順序調整，建議未來研究者可持續關注新課綱下此單元學生解題時錯誤類型的發展變化。

7. 參考文獻

[1] 九章出版社（1995）。**錯解辨析**。臺北市：九章。

[2] 王俊宇（2012）。**國中三角形三心課程輔以幾何繪圖軟體對國三學生學習成就與學習態度影響之研究**（未出版之碩士論文）。國立彰化師範大學，彰化縣。

[3] 左台益（2016）。**國民中學數學第五冊課本**。臺南市：南一書局。

[4] 余民寧（2011）。**教育測驗與評量：成就測驗與教學評量**。臺北市：心理。

[5] 李建德（2009）。**高雄市前鎮區草衙地區國三學生在圓單元錯誤類型之分析研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[6] 李瑞林（2009）。**GSP 電腦輔助教學對國三學生學習三角形外心、內心及重心成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立政治大學，臺北市。

[7] 洪有情（2016）。**國中數學課本第五冊（3 上）**。新北市：康軒文教事業。

[8] 翁秉仁（2015）。黑臉：數學教育的兩難。**數理人文**，**3**，100-103。

[9] 翁敏傑（2015）。**脈絡整合對三角形三心學習成效之研究**（未出版之碩士論文）。國立交通大學，新竹市。

[10] 馬秀蘭（譯）（2009）。Stephen Krulik, Jesse A. Rudnick 著。**中學數學教學資源手冊－推理與解題導向**（The New Sourcebook for Teaching Reasoning and Problem Solving in Junior and Senior High School）。臺北市：心理。

[11] 張幼賢（2016）。**國民中學數學課本第五冊**。臺南市：翰林出版。

[12] 教育部（2008）。**國民中學九年一貫課程綱要數學學習領域**。臺北市：教育部。

[13] 陳子儀（2015）。**探討ＧＳＰ動態教學對國三學生學習三角形外心、內心及重心之成效**（未出版之碩士論文）。國立臺南大學，臺南市。

[14] 黃上豪（2004）。**高雄市國三學生在圓單元錯誤類型之分析研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[15] 黃昭智(2011)。**探討三角形的全等錯誤類型之研究—以國中三年級學生為例**(未出版之碩士論文)。國立臺中教育大學，臺中市。

[16] 趙千翔(2012)。**臺中市國民中學三年級學生相似形單元錯誤類型之分析研究**(未出版之碩士論文)。國立臺中教育大學，臺中市。

[17] 趙文源（2010）。**高雄縣國三學生平行與截線概念錯誤類型分析之研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[18] 蔡榮修（2007）。**應用心智圖教學法於國三學生數學學習成效之研究—以「三角形三心」為例**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[19] 蔡聰明（2010）。**數學的發現趣談（修訂二版）**。臺北市：三民。

[20] 魏淑卿（2003）。**概念圖教學對國中生數學合作學習成效研究—以「三角形三心」單元為例**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[21] French, D. (2004). *Teaching and learning geometry*. New York：Continuum International Publishing.

[22] George, D., & Mallery, P. (2009). *SPSS for Windows step by step: A simple guide and reference. 16.0 update (9th ed.)*. Boston: Allyn & Bacon.

[23] Kathleen, T. T. (1987). *Error reducation strategies for whole number operations in grade four*. Doctoral Dissertation, University of Brigham Young.

[24] Mayer, R. E. (1987). *Education psychology: A cognitive approach*. Boston: Little, Brown and Company.

[25] Mayer, R. E. (1992). *Thinking, problem solving, cognition(2nd ed.)*. New York:W. H. Freeman and Company.

[26] Polya, G. (2004). *How to solve it : A new aspect of mathematical method (Princeton Science Library)*. (Expanded Princeton Science Library Edition). Princeton University Press.

[27] Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

[28] Wilson, James W., Fernandez, Maria L., & Hadaway, Nelda (1993). Mathematical problem solving. In Wilson, Patricia S. (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 57-78). New York: Macmillan Publishing Company.