Analysis of the error patterns made by 6th Graders using number sense to solve math problems

Yu-Fang Wang [1,] and Chien-Chung Huang [2]

[1] *Chongsyue Elementary School, Tainan, Taiwan*
[2] **Department of Applied Mathematics, National University of Tainan, Taiwan**

The purposes of this study were to investigate the performance of the ability of number sense for sixth graders, to summarize and analyze the patterns of errors made by school students, and explore the possible reasons for their formation, in order to understand the myths and mistakes of sixth-grade students' learning number sense. The study results are references for teaching improving and furthering study.

Both qualitative and quantitative design were employed in the study, and the number sense questionnaire designed by researcher was used to test 49 subjects who participated in the study from 2 classes of a specific elementary school in the East district of Tainan city. Based on the willingness and responses of subjects, some students were picked and then interviewed. SPSS21 and Microsoft Office Excel 2016 were used to analyze the quantitative data. By comparing the contents of the interviews, the researcher sorted the pattern of error and the cause of the error. The research results are as followings：

First, the overall average performance of the sixth-grade elementary school students is low. Among them, "the ability to understand the meaning of an operation toward a number and the operation's influence" is the best indication.

Second, the sixth grader's answer are divided into the following eight patterns of errors:

(1) The error pattern of integer concept.
(2) The error pattern of the fractional concept.
(3) The error pattern of the decimals concept.
(4) The error pattern of the lack of prior knowledge.
(5) The patterns of stereotyped actuarial concepts.
(6) Careless error pattern.
(7) The error pattern of guessing.
(8) The error pattern of the weak reasoning ability.

Third, the reasons for the mistakes made by the sixth grade students in the school are summarized as the following five possible causes:

(1)The myth concept of number sense: contains the concept of number sense and the misuse of the number sense strategy.
(2) Habitual column computing learning.

----

* Corresponding author:hcc001@mail.nutn.edu.tw
DOI：10.3966/2223448920191000902003

(3) Negative guesswork.

(4) Lack of mathematical reasoning ability.

(5) Lack of ability to check errors.

Index Terms **—6th Graders, number sense, the ability of number sense, pattern of error, cause of error.**

Corresponding author: judyw@tn.edu.tw

國小六年級學童數感解題之錯誤類型分析

王郁芳*
臺南市立崇學國民小學

黃建中
國立臺南大學應用數學系

摘要

本研究主要目的在探究國小六年級學童在數感能力的表現概況，並加以歸納及分析學童的錯誤類型，探討其可能形成的原因以了解六年級學童對數感學習的迷思與錯誤，進而提供教師教學改善與未來相關研究者的參考。本研究採質量混合設計，以研究者自編「國小六年級學童數感能力分析問卷」進行測驗。研究者選取臺南市東區某國民小學，兩個班共 49 名學童為研究樣本，進行數感能力問卷的施測。再依照學童意願與答題反應，選取部分學童進行晤談。研究者再以 SPSS 21.0 中文視窗版、Microsoft Office Excel 2016 分析量化資料，並比對晤談內容,整理出錯誤類型與可能形成錯誤的原因，分析研究結果如下：

一、國小六年級學童於數感能力的整體表現偏低，其中以瞭解運算對數字的意義及其影響的能力為表現最佳的向度。

二、國小六年級學童答題錯誤類型分為以下八項錯誤類型:

(一) 整數概念迷思錯誤類型。
(二) 分數的概念迷思錯誤類型。
(三) 小數概念迷思錯誤類型。
(四) 先備知識缺乏錯誤類型。
(五) 刻板精算迷思類型。
(六) 粗心錯誤類型。
(七) 猜答案錯誤類型。
(八) 推理表述能力薄弱錯誤類型。

三、國小六年級學童於數感上的錯誤形成原因，歸納為以下五大可能錯誤原因:

(一) 數感概念迷思:包含數感概念錯誤與數感策略誤用。
(二) 習慣列式精算學習。
(三) 消極猜測。
(四) 缺乏數學推理的能力。
(五) 缺乏檢核錯誤的能力。

關鍵詞：國小六年級學童、數感、數感能力、錯誤類型、錯誤原因

壹、前言

數感是一種對於數字、運算及數字與運算之間的理解與認知(楊德清，2000)。雖然國內外數學教育皆重視數感的教學(教育部，2003，2018；NCTM, 2000)，然而，觀察教學現場發現學童數感能力是待提升的。Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johansson 與 Yang (1999)以澳洲、瑞典、美國與台灣年齡 8 到 14 歲學童為研究對象，進行數感能力探究，其共同點是學童在數感的表現上一樣不佳。基本而言，各國的數學學習內容都是一樣的;但是，教科書不盡相同，教師教數學的方式亦有所不同，且備課的方式也不同，卻致使學習者在數感表現上有類似的結果。許多研究發現台灣學童擅長於計算，但數感能力的發展卻未能跟上(江曉霜，2010；林素微，2002；徐俊仁，2001；許清陽，2006；鹿曉雯，2015；黃唯娟，2008；黃琮智，2008；黃賢宗，2014；楊德清，1998， 2000，2001，2002；謝宗育，2011；Reys & Yang, 1998)。這與台灣基礎教育階段的培育有極大的關係，國內學童在缺乏意義化的數學學習下，雖然解題技巧快速而準確，但卻只習得制式化的程序性知識；在解題過程中，未能有思考其所蘊含之數學意義的學習習慣，久而久之，便造成了其數感的低落，連帶影響日後在數學學習上的發展。由此可知，數感對於學童的數學學習成就與興趣的啟發有著相當大的影響力。

Kathryn (2011)提到錯誤是人類認知中相當關鍵的一環，在學習和改變過程中，多虧有了錯誤，才能修正對自身的理解,不管錯誤再怎麼令人困惑，能讓我們學到東西的終究是錯誤而非正確。梁淑坤(1996)提到錯誤是學習過程中的重要一環，不論教

師在教學過程中怎樣用心，學童在解題時還是會出現錯誤。所以教師若能適度的以錯誤作為引導，讓學童獲得正確的概念，也是一種不錯的教學方式。故對錯誤的類型與形成原因做進一步的分析與探討，必能減少學童再次發生錯誤學習的機會。因此，探討學童數感解題之錯誤類型與形成原因是有其必要的，因為錯誤反應歷程與結果，可以提供教師有關學童數感運思相關訊息，以作為數感教學之參考，在學童往後數學概念之建立也有深遠的影響。

國內數感相關的研究不在少數，顯示國內的數學教育相當重視學童數感能力的發展，研究者進一步彙整發現對於數感解題的錯誤類型與形成的可能原因之相關研究相對較少，須求更多相關研究，因此，本研究依據許清陽（2006）的研究中之數感組織架構的五大理論向度與目前實施「九年一貫課程綱要」之架構下，歸納分析出國小六年級學童在數感上的學習表現與錯誤類型，並探討錯誤的可能形成原因,盼能了解六年級學童的數感能力表現概況、解題的錯誤類型與發生可能原因，以提供日後研究與教師進行數學教學上的參考依據，讓學童能夠在數感的學習更臻完備。

貳、數感重要性與組成架構

一、數感重要性

數感即是指學童在學習數學時，其本身對所面對的問題，腦中所浮現出的感覺或能力，以及數學內蘊化的結果，再針對這些感覺與能力做有效的運用與處理，發展出自己一套解決問題的能力，由此可知，數感對數學學習有相當程度的影響，若能瞭解數感對數學學習的影響，就能更深刻的覺知出數感的重要性。國內的數學教育在升學主義的強勢引導下，一直無法跳脫強調公式的熟記、追求精確的答案以及熟練解題技巧之窠臼，然而卻疏忽了對數字意義與數學概念的瞭解，學童學習數學的過程缺乏與生活情境體驗的連結，沒有養成以數學觀點觀察周遭事物的習慣，學習顯得缺乏趣味與意義，造成大多數學童的數學學習動機低落。

Mack (1990)認為學童對於算則的知識經常是錯誤而不自覺的，程序性的知識經常阻礙學童發展自己解題的方法，學童只是規則的計算而忽略了情境脈落中的問題內容；另外學童往往只相信算則的答案，而不相信自己的想法。研究者在教學現場也發現部分在紙筆測驗有不錯成績表現的學童，在無紙筆計算的施測過程中會顯得不知所措，例如要學童回答$\frac{8}{9}+\frac{7}{8}$大約是多少？大部分的學童的解題策略均是將分母通分，再將分子相加，這是上課時老師教的計算方式，但其實解此題只需用估算即可，算式中的 $\frac{8}{9}$ 和$\frac{7}{8}$ 都是接近 1 的分數，兩數的和則是接近 2，這樣看似容易的問題卻難倒許多學童，這正是因為傳統的數學教學方式強調的是答案的「精確性」，學童學習時並未將解題過程意義化，學到的只是程序化的知識，所以只會照著課堂上所學的計算方式與步驟來解題，可見，對某些學童而言，數學學習只是公式，只是上課聽講，課後埋頭計算練習的科目。解題時，學童經常依賴老師所教的統一標準算則，而漸漸失去思考的能力，也失去對數字意義的認知理解，這即是缺乏數感能力。研究者並非認為使用傳統算則是不佳的解題方式，而是希望學童的學習是將算則建立在有意義的思考上，方能有效的解決學習時所面臨的困境，並且應該建立學童正確的觀念，算則並非是解出正確答案的唯一策略，數學學習應該強調有意義的學習，學童自發性的歸納並建構所學才是學習的王道。

由上述可知，在課程中發展及培養學童的數感是十分重要的，數學常識的基礎在於學童本能的直覺及確信數學是有意義的，認知到數學不只是規則的集合，進一步了解到解題策略是多元的，更可以由數學的感覺來判斷解題結果的合理性，學童從學習數學中可以獲得自信（Howden,1989）。

現今國內的眾多數學科教材中，不難發現，與「數感」有關的內容越來越多。而在九年一貫課程綱要，國小數學教學的課程目標之一是在培養學童的數感能力，更清楚的在國民小學第二階段(國小三

~四年級)目標提到「能熟練自然數的四則與混合計算，培養流暢的數字感」，此目標充分顯示出國內數學教育對學童數感能力發展的重視程度 (教育部，2003)。即將在 2019 年施行的「十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域教學實施要點」中，也提到要學好數學，仰賴學童在各課題的學習，最後能收斂連結為對數學的整體感或直覺，作為下一個課題學習的基礎；整體感的自信，相當依賴於學童對於相關程序（例如：計算方式、解題方式等）的熟練，而這種熟練，則是教師能給予學童有啟發性的練習，而非機械式的反覆練習，讓學童從這些練習中，沈澱自己新學的概念，並能夠與原先的數學知識相連結(教育部，2018)。在在顯示數感能力的培養是我國數學教育改革的重點項目之一。

二、數感的組成架構分析

針對數感組成架構，學者專家們各有見解，莫衷一是。研究者發現，大部分的數感理論架構都先由對數字本身的意義及感覺開始，再談到比較數字之間大小的關聯，接著談到數字與運算的關係，進而藉由基本運算討論合理的使用運算上的技巧與策略，並能判斷答案的合理性，最後再討論數字在生活情境或是運算上的多重表徵的關係，其中各學者所認定的數感組織架構雖然不盡相同，但究其內涵皆是對數學概念有意義的理解，並能靈活思考，且以彈性運用策略來完成解題。

本研究對象是國小六年級學童，數感能力探討部分包含了正整數、小數、分數，詳觀所蒐集的眾多文獻中，研究者認為許清陽（2006）提出數感組成架構最適用於本研究，因其研究對象與本研究對象學齡相同，另外，分析其理論向度內涵與九年一貫數學學習領域能力指標的關聯性，也發現其五個理論向度與目前國民小學數學教育之學童應具備的能力指標與相契合。其五大理論向度說明如下:

(一) 解數字的意義和關係: 對於正整數、小數、分數等有理數，能瞭解數字的基本意義及數字間的關係。

(二) 比較數字相對大小: 具有比較和排序數字的能力。

(三) 瞭解運算對數字的意義和影響:瞭解運算在不同數字間所產生的影響。

(四) 發展計算策略與判斷答案的合理性:能應用不同解題策略於計算情境，並能預估答案合理性之能力。

(五) 瞭解數與運算的多重表徵:具備以不同形式表徵數字的能力。

參、錯誤類型與原因之相關研究

有關教與學的研究中，教師常認為學童答錯是因不小心或誤解題意，但在建構教學理念中，學習的主體轉到學童身上，學童依據原有經驗與社會互動，創造出自己對學習歷程的見解，主動建構所學習內容的同時，錯誤數學概念也可能會在過程中產生，造成了學習的困擾並影響著未來的學習（林清山、張景媛，1994）。

梁淑坤(1996)提到錯誤是學習過程中的重要一環，不論教師在教學過程中怎樣用心，學童在解題時還是會出現錯誤。在研究者的教學經驗中，當發現學童有錯誤概念時，總是不厭其煩的進行教學上的對話，希望協助學童釐清問題的所在，修正其學習上的錯誤概念；因為學習數學，如果某個環節出錯而沒有修正，很快的就會在下一個學習階段遇到關卡而無法跨越。雖然追求答案的正確是教師教學後所希冀看到的結果，但在學童解題過程中，所出現的錯誤也有其存在的價值。Schwarzenberger (1984)提到錯誤在數學中和正確答案一樣重要，錯誤不僅幫助學童思考、了解數學的來龍去脈;對教師而言，錯誤可做為診斷學童學習成效的工具，讓教師了解學童可能的運思,進而調整修正教材的內容與教法。對錯誤的原因做進一步的探究。分析，針對學童常發生錯誤的觀念設計出對應的教學活動，並採取適當的教學策略，則可以減少學童再次發生錯誤學習的機會。故探究學童之錯誤類型與形成原因是有其必要性。

一、錯誤類型之相關研究

李芳樂(1993)提到了早期的心理學家認為

錯誤可以分為兩種：其一為不小心做錯所造成的錯誤，稱為疏忽(slip)，另一種則是由於學習了不正確的觀念或程序而導致的錯誤，又稱為系統性錯誤(systematic errors)。錯誤如果來自於疏忽，即是一種隨機出現的錯誤，此種錯誤類型既不固定也無法預料，此錯誤大多歸因於學童作答時的技巧不佳，也許是粗心大意或是該注意而沒注意到。 Maurer（1987)也指出學童在數學上所犯的錯誤大多都是有系統的，而這些錯誤皆為永久性的錯誤而非隨機出現；有時候這些錯誤會自我矯正，但有時候也會一再的發生。透過對系統性錯誤的研究，可以加深對學童學習過程的認識並診斷學童的錯誤，以減少學童重複犯錯的次數，因此，系統性錯誤也就成為學者們積極研究的重點。秦麗花(1995)將解題錯誤分為四個層次：

(一) 缺少檢驗工作，忽略答案合理性：沒寫答案、沒寫單位、單位寫錯、不知答案為何、省略解題步驟、抄寫錯誤等。

(二) 執行計畫失誤，運算不熟練：基本運算不熟練、不懂借位運算、兩種運算混淆、顧此失彼。

(三) 基本概念不清，盲目運算：缺少相關概念知識、不懂數學語言、迷失於關鍵字中、無法辨別數據大小、無法辨別數據間的意義、只停留在加減運算、缺乏乘除概念。

(四) 沒有解題能力及作答動機：閱讀能力差、一知半解、畏懼作答。

九章出版社(1995)在《錯解辨析》一書中將錯誤類型分為:

(一) 概念不清所產生的錯誤:包括概念實質模糊、相似概念混淆等而產生的錯誤。

(二) 推理無據所產生的錯誤:包括猜測定理、濫用法則、證據不足及錯誤解題策略等所產生的錯誤。

(三) 忽視條件所產生的錯誤:包括忽略了概念中的隱含條件、所使用的公式、定理與法則的適用條件、取值範圍的變化、條件的充分性與必要性和結論特徵中的隱含條件及錯誤理解條件、遺漏或濫加條件、把給定的一般條件特殊化等所產生的錯誤。

(四) 考慮不周全所產生的錯誤:包括審題馬虎、形式套用、顧此失彼、忽視特例、以偏概全及檢驗不當而產生的錯誤。

由以上學者提出的研究，可知學童在數學上所犯的錯誤大多是有系統且非隨機的，錯誤常發生在學童因應解題而自行發明的方法而產生的錯誤，所以在教學過程中，教師可多鼓勵學童發問或是注意學童的解題過程，將學童易錯的概念，適時的進行補救教學，引導學童建立正確概念。

二、錯誤原因之相關研究

在學童學習歷程中，發生錯誤是常見的現象，錯誤發生的原因是來自於不完全的學習和逐漸養成的習慣所致，也可能是無法適應教師的教學模組；另外，教師在教學過程中所給予的限制也可能會影響學童的運思；甚至是學童的學習過程中誤解題意或因教師的教學內容而產生錯誤的想法。若能了解學童錯誤的背後原因與作答時的內在運思過程，將能有效的降低學童一再犯錯的機率。

石函早與胡俊山(2007)提出數學錯誤概念產生的原因有:

(一)學童認知方面:在生活經驗中的日常概念上，易導致對抽象層次較高的數學概念有錯誤。

(二)教師教學方面:概念的本質屬性要全面性的演示，否則學童易斷章取義。

(三)教材編寫方面:須注意嚴謹性，而且要減少編寫者的認知層次之侷限性，以免影響學習者的學習。

冷月琴(2012)在學童解題過程中錯誤產生的原因，歸納出五種可能：

(一)自我建構上的錯誤：指學童在知識建構的過

程中，由下往上的概念形成中產生錯謬，導致由上往下產出應用時發生錯誤。

(二)企圖修補而尋求替代方案：學童在解題過程中面對難題，尋求其他規則或解決策略時，誤用錯誤解題策略。

(三)錯誤概念的類化：學童對正確的規則做出過度類化或錯誤類化，當學童學習新的數學知識時，因為能力不足，誤用舊經驗解決新問題，或是新的數學知識與舊經驗互相干擾。

(四)第六感判斷。

(五) 斷章取義的關鍵字判斷:可能來自於學童對概念了解的不夠充分所致。

綜合以上研究，可以歸納出學童解題之錯誤原因如下:

(一)教科書不適當的概念呈現或學童錯誤的詮釋教科書意義。

(二)教師教學時，缺少完整的概念說明或不當的使用數學規則;使學童誤解了教學內容。

(三)教師未能適時修正及補救學童的錯誤概念。

(四)學童的數學概念迷思、運算能力等先備知識不足，或是生活經驗與學習的習慣及態度所導致。

肆、錯誤類型在數感能力解題之相關研究

國內關於國小學童數感表現研究相當多，研究者僅就近十年來的相關研究文獻做彙整，對於數感錯誤類型與原因的相關研究如下表:

表一 數感能力解題錯誤類型相關研究分析表

研究者/年份	數感能力解題錯誤類型整理
黃琮智(2008)	研究中歸納出傳統算則型、數感迷思型(包含數感錯誤型與數感誤用型)、逃避型三種錯誤類型。
江曉霜(2010)	研究中歸納出傳統算則型、數感迷思型與逃避型三種錯誤類型。
謝宗育(2011)	研究中歸納出計算錯誤型、概念迷思型與逃避瞎猜型三種錯誤類型。
黃賢宗(2014)	研究中歸納出概念迷失錯誤類型、誤解題意錯誤類型、計算錯誤類型與猜測回答錯誤類型四種錯誤類型。

雖然國內數感相關的研究越來越多，顯示國內相當重視學童數感能力的發展，但由表一可知，對於數感錯誤類型與原因的相關研究相對較少，須求更多相關研究，以作為數感教學之參考，才能夠減少學童學習時錯誤概念的產生。

伍、研究方法

一、研究設計

本研究採問卷調查法，抽樣臺南市東區某國小六年級兩班四十九位學童，以蒐集相關研究資料，方式是由研究者蒐集兩階段資料，第一階段採紙筆測驗蒐集量化資料，依據受試者在「國小六年級學童數感能力分析問卷」上的解題表現，探討學童以「數感能力」解題之表現及其相關因素的影響；為了能更真實、深入瞭解學童解題運思過程的思維，第二階段以「質性晤談」蒐集質性資料，由學童的解題表現來討論學童在解題上的錯誤想法及其解題差異，藉以了解六年級學童於數感能力解題之錯誤類型與錯誤可能形成原因，使教師對學童於數感解題的表現及差異有更深入的了解，以供教師在設計教學活動時的參考，進一步提昇教學成效，並增進學童的數感能力及其數學科的學習成就與興趣。

二、研究工具

本研究主要之研究工具為「國小六年級學童數感能力分析問卷」，參酌許清陽(2006)「電腦化數感診斷測驗系統」、黃琮智（2008）「國小六年級學童數感能力分析之研究」、106 學年度南一版教科書版本編纂問卷，再徵詢過數學教育專家、資深教師的意見後修訂成「國小六年級學童數感能力分析」預試問卷，共 25 題選擇題，採二階段題型形式呈現，而作答方式採用紙筆測驗，由於數感本身就是一種內蘊化的能力，為求學童能將其思考歷程正確的以文字呈現，因此，問卷之作答方式，除了選擇預選之答案外，並請學童於答案確認後，至原因區撰寫下為何選此答案的原因，選擇預選答案選對了，加上選此答案原因的敘述須符合數感思維才算答對，答對得 1 分，答錯得 0 分。

確立預試初版本後，以此在預試班進行施測，再依據預試的結果做問卷的難度與鑑別度分析及信效度分析，經實際預試結果顯示具有不錯的信度（α=.847）顯示問卷具有相當之信度，為可用問卷；將難度(*p* 值)的範圍，位於.20 至.80 範圍之外的題目與鑑別度(*D* 值)最低標準在.25 之下的鑑別力不佳試題，加以修改或捨棄，經與數學教育專家及資深教師討論，擬將難度指數及鑑別度分析上呈現出不適宜之第一、第五、第十四、第二十五題剔除，問卷重新編寫後，共有 21 題，本問卷測驗題目之試題分配表如表二，再進行正式施測。

表二 「國小六年級學童數感能力分析」問卷之試題分配表

數感能力測驗問卷試題之理論向度	問卷題號	題數
(1) 瞭解數字的意義和關係的能力	1、6、11、16	4 題
(2) 比較數字相對大小的能力	2、7、12、17、21	5 題
(3) 瞭解運算對數字的意義和影響的能力	3、5、8、13、18	5 題
(4) 發展計算策略與判斷答案合理性的能力	4、9、14、19	4 題
(5) 瞭解數與運算多重表徵的能力	10、15、20	3 題
		共 21 題

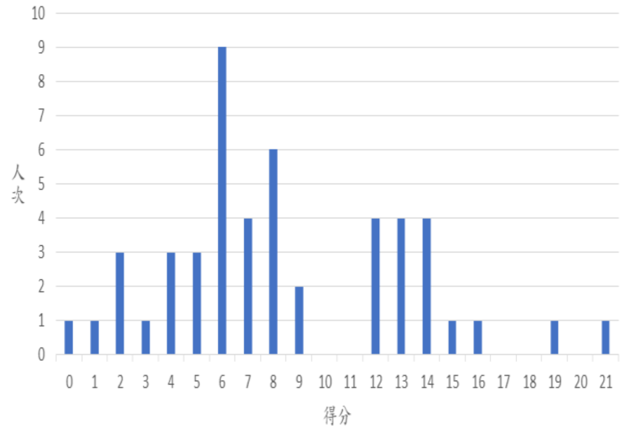
在研究對象進行「國小六年級學童數感能力分析問卷」測驗後，研究者選取合適的晤談學童 37 名，做為晤談的樣本，進行質性晤談，再將質性晤談所蒐集到的資料作整理與分析，分析學童在數感能力的解題表現，並討論學童在解題上的差異及其錯誤，以獲取學童數感解題表現之差異與錯誤情形之資料，並藉此針對學童在解題時出現的錯誤進行錯誤類型與可能形成原因的分析，以便了解學童在數感解題時的錯誤類型與可能的原因。

陸、結果分析與討論

一、數感能力測驗結果表現情形

（一）全部樣本測驗結果摘要統計

全部樣本測驗結果的平均數、標準差、統計表及分佈圖全部樣本在「國小六年級學童數感能力分析問卷」之測驗結果為平均數為 8.41 及標準差為.49。進一步用長條圖分析得分分佈情形如圖一。



圖一 全部樣本得分分布圖

由圖一可以發現，研究樣本得分集中在4~9分，得分偏低，顯示樣本在運用數感能力解題確實有問題存在，值得探究分析。

將受試者的施測資料經過整理歸納後，統計出各試題中的答對人數、答錯人數(不包含空白人數)、空白人數及所佔比例。受試者在「國小六年級學童數感能力分析問卷」測驗中的答題情形依各題分類，如表三所示。

表三 全部樣本各題答對率、答錯率及空白率統計 (N=49)

題號	答對人數	答對率%	錯誤人數	錯誤率%	空白人數	空白率%
Q1	27	55.1	22	44.9	0	0
Q2	29	59.2	19	38.8	1	2
Q3	32	65.3	17	34.7	0	0
Q4	20	40.8	29	59.2	0	0
Q5	19	38.8	30	61.2	0	0
Q6	4	8.2	43	87.7	2	4.1
Q7	20	40.8	29	59.2	0	0
Q8	9	18.4	38	77.5	2	4.1
Q9	13	26.5	36	73.5	0	0
Q10	26	53.1	22	44.9	1	2
Q11	20	40.8	28	57.2	1	2
Q12	7	14.3	38	77.5	4	8.2
Q13	42	85.7	7	14.3	0	0
Q14	10	20.4	39	79.6	0	0
Q15	35	71.4	14	28.6	0	0
Q16	6	12.3	42	85.7	1	2
Q17	14	28.5	31	63.3	4	8.2
Q18	22	44.9	26	53.1	1	2
Q19	25	51	22	44.9	2	4.1
Q20	29	59.2	20	40.8	0	0
Q21	17	34.7	31	63.3	1	2

說明：

1. $答對率 = \frac{答對人數}{總人數} \times 100\%$

2. $錯誤率 = \frac{錯誤人數}{總人數} \times 100\%$

3. $空白率 = \frac{空白人數}{總人數} \times 100\%$ ，其中「錯誤人數」不含「空白人數」。

依有效樣本的錯誤情形整理其中「錯誤率」與「空白率」的關係成表四全部樣本「錯誤率」與「空白率」的關係表。

表四 有效樣本「錯誤率」與「空白率」之關係表

空白率 \ 錯誤率	0~15%	15~30%	30~45%	45~60%	60~75%	75~90%
0~15%	◎Q13	◎Q15	◎Q2 ◎Q3 ◎Q10 ◎Q19 ◎Q20	◎Q1 ◎Q4 ◎Q7 ◎Q11 ◎Q18	◎Q5 ◎Q8 ◎Q9 ◎Q17 ◎Q21	◎Q6 ◎Q12 ◎Q14 ◎Q16
15~30%						
30~45%						
45~60%						

說明：(1) ◎Q10：表示全部樣本作答第 10 題 (Q10) 的結果

在表三中，若將「錯誤率」以 45 ％為分界線，「空白率」以 15 ％為分界線將表格分割為四部份，並將左上角稱為第一區；右上角稱為第二區；左下角稱為第三區；右下角稱為第四區，若以此分割來討論「錯誤率」 與「空白率」，則可整理如表五樣本錯誤情形分析表。

表五 樣本錯誤情形分析表

	低 ← 錯誤率 → 高	
低 ↑ 空白率	愈往左上方「錯誤率」及「空白」愈低，表示愈不會困擾學童，學童犯錯應為少數居多。	愈往右上方「錯誤率」愈高、「空白」愈低，表示此類題目學童的錯誤迷思概念愈多，所以，本區應可提供最多的錯誤類型及錯誤原因供分析研究。
↓ 高	本區題目愈往左下方「錯誤率」愈低、「空白」愈高，表示完全缺乏概念的學童佔犯錯比例愈高。	本區題目愈往右下方「錯誤率」愈高、「空白」愈高，表示完全沒概念的學童愈多，且容易放棄解題。

資料來源：引自郭正仁(2001)。**高雄市國二生多項式四則運算錯誤類型之研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。

由表四與表五可得知，本研究樣本的錯誤情形為第二區，顯現樣本在本問卷試題表現，其錯誤迷思多，本區應可提供最多的錯誤類型與錯誤原因供研究分析，故再進一步分析數感錯誤類型與形成錯誤的可能原因。

（二）受試者在五大數感理論向度的答題情形

將測驗結果在五個理論向度呈現之情形整理如表六數感能力理論子向度之敘述性統計表。

表六 數感能力理論子向度之敘述性統計表

	平均數	標準差	答題正確率
(一)瞭解數字的意義和數字間關係的能力	1.12	.45	36.22%
(二)比較數字相對大小的能力	1.72	.48	35.5%
(三)瞭解運算對數字的意義及其影響的能力	2.43	.5	50.6%
(四)發展計算策略與判斷答案合理性的能力	1.37	.48	34.68%
(五)瞭解數與運算多重表徵的能力	1.77	.49	61.2%
整體數感能力表現	8.41	.49	43.6%

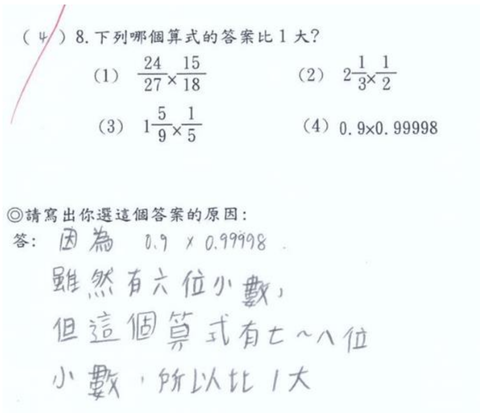
樣本在數感能力之五個理論向度中，瞭解數字的意義和數字間關係的能力表現相對偏低，平均數 1.12，標準差 .45；表現相對最好的是瞭解運算對數字的意義及其影響的能力，平均數 2.45 ，標準差 .50，學童在其他向度表現，從平均數來看，皆是相對接近的，從標準差來看，表現亦相當集中。

研究結果發現，理論向度(三)對瞭解運算對數字的意義及其影響的能力平均數是所有向度中最高，而向度(一)瞭解數字的意義和數字間關係的能力之平均數最低，本結果與謝宗育（2011）之研究結果比較，其平均數最低為向度(一)瞭解數字的意義和數字間關係的能力結果一致，但本研究的平均數最高的向度(三)對瞭解運算對數字的意義及其影響的能力，在謝宗育（2011）之研究中，反而是所有理論向度中表現排行第三，由此結果可發現本研究樣本在向度(三)對瞭解運算對數字的意義及其影響的能力是有所提升，此能力指的是瞭解運算在不同數字所產生的影響，當運算元改變時，其結果也會跟著改變（許清陽，2006），顯示本研究樣本較能瞭解當運算元素改變時,其結果也會跟著改變。然而，整體數感能力測驗的表現卻是相對偏低，顯示本研究的六年級樣本的數感能力有待加強；因此，進一步探討國小六年級學童數感解題之錯誤的類型和錯誤形成的原因有其必要。

二、數感能力解題錯誤類型

將受測樣本在回答各題之內容分析比較而整理出錯誤類型,並選取樣本進行各錯誤類型質性晤談,針對所有回收問卷中錯誤的題目進行分析，並將錯誤原因分析整理後，將六年級學童數感能力錯誤類型分為以下八大類:

（一） 整數概念迷思錯誤類型(T01): 樣本的解說顯現其作答有整數相關概念的認知錯誤，包含整數的乘除概念，明顯偏離相關概念或誤用數感概念及策略者，皆列為整數的概念迷思錯誤類型。


(4) 8. 下列哪個算式的答案比 1 大?

(1) $\frac{24}{27}\times\frac{15}{18}$ (2) $2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

(3) $1\frac{5}{9}\times\frac{1}{5}$ (4) 0.9×0.99998

◎請寫出你選這個答案的原因:

答: 因為 0.9 × 0.99998
雖然有六位小數,
但這個算式有七~八位
小數,所以比 1 大

R：這題目你看得懂嗎？

S36：（點頭）

R：好，那這題目要求你做什麼樣的解題？

S36：看哪個算式算出來的答案比 1 大。

R：你看一下你當初選答的原因，說說看你的想法是什麼？

S36：這個（指 0.9）乘以這個（指 0.99998），乘起來有 6 位小數，會比 1 大。

R：為什麼？

S36：因為這乘起來有 7～8 位數字。

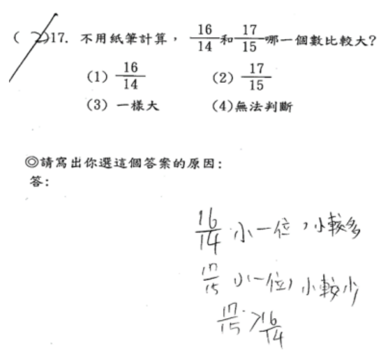
R：你認為 9 × 99998 乘起來會有 7～8 位數字，可是你是寫 7～8 位小數，這跟比 1 大有關係嗎？

S36：乘起來是有 7～8 位數。

R： 所以你認為 9×99998 的積有 7～8 位數，乘起來有 6 位小數，小數點點下去，整數至少有個位，甚至十位，所以一定比 1 大嗎？

S36：嗯！

（二） 分數的概念迷思錯誤類型(T02): 樣本的解說顯現其作答有與分數有關概念的認知錯誤，包含分數的乘除概念，明顯偏離相關概念或誤用數感概念、策略者，皆列為分數的概念迷思錯誤類型。


(2)17. 不用紙筆計算，$\frac{16}{14}$和$\frac{17}{15}$哪一個數比較大？

(1) $\frac{16}{14}$ (2) $\frac{17}{15}$

(3) 一樣大 (4)無法判斷

◎請寫出你選這個答案的原因：

答：

$\frac{16}{14}$ 小一位，小較多

$\frac{17}{15}$ 小一位，小較少

$\frac{17}{15} > \frac{16}{14}$

R：你再看一下當初的解釋，$\frac{16}{14}$小 1 位，小較多，你可以說說看這裡的意思嗎？

S2：可能是……，我題目看錯了。

R：沒有啦！我看的出來你很認真在寫。

S2：是，我是很認真在寫。

R：但你寫小 1 位，老師不清楚你「小 1 位」的意思，你可以解釋一下嗎?

S2：我認為這個（指 17），減這個（指 16）。

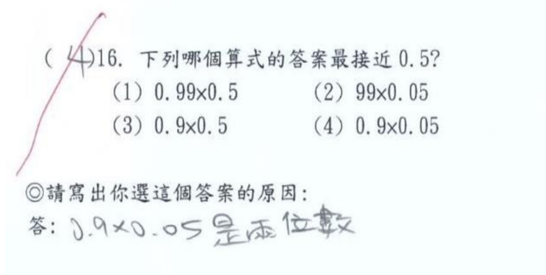
R：所以是 17 減 16，17 就大於 16，16 比較小，你是用分子來判斷分數大小？

S2：對，因 $\frac{1}{14}$和 $\frac{1}{15}$兩個差不多。

R：因 $\frac{1}{14}$和 $\frac{1}{15}$兩個差不多，分子 17 大於分子 16，所以你覺得 $\frac{17}{15} > \frac{16}{14}$，因為分母 14、15 都平分成很多份，所以 $\frac{1}{14}$和 $\frac{1}{15}$差不多，你的意思是這樣嗎?

S2：對。

（三） 小數概念迷思錯誤類型(T03)：樣本的解說顯現其作答有與小數有關概念的認知錯誤，包含小數的乘除概念，明顯偏離相關概念或誤用數感概念、策略者，皆列為小數的概念迷思錯誤類型。


(4)16. 下列哪個算式的答案最接近 0.5?

(1) 0.99×0.5 (2) 99×0.05

(3) 0.9×0.5 (4) 0.9×0.05

◎請寫出你選這個答案的原因：

答：0.9×0.05 是兩位數

R：這一題你看得懂嗎？

S10：(點頭)哪一個算式算出的答案最接近 0.5。

R：好，你再看一下當初寫的，你是想怎樣解題？

S10：位數。

R：你想用位數解題，你可以說說看「0.9 × 0.05 是兩位數」是什麼意思呢？

S10：0.05。

R：你是說 0.05 有兩位小數，所以呢？

S10：比較接近 0.5。

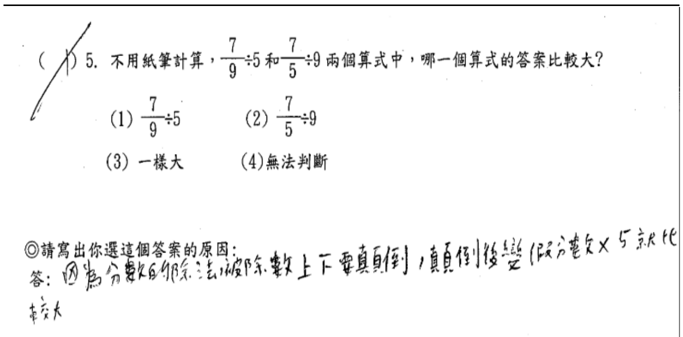
R：你的意思是因為 0.05 是兩位小數，所以 0.9 乘以 0.05 結果有兩位小數，所以比較接近 0.5。

S10：（點頭）

R：好，你認為 0.9 和 0.05 中，最多是 2 位小數，9 乘以 5 等於 45，以最多小數位的 0.05 來決定積也有 2 位小數，所以乘起來等於 0.45，所以兩位數是這意思嗎？

S10：（點頭）

（四） 先備知識缺乏錯誤類型(T04)：樣本在問卷答題原因說明中，對題意的了解及解題的方向都沒問題，但缺乏解題的先備知識或解題的先備知識錯誤而導致作答錯誤者，皆列為先備知識缺乏錯誤型。


(1) 5. 不用紙筆計算，$\frac{7}{9}\div5$和$\frac{7}{5}\div9$兩個算式中，哪一個算式的答案比較大?

(1) $\frac{7}{9}\div5$ (2) $\frac{7}{5}\div9$

(3) 一樣大 (4)無法判斷

◎請寫出你選這個答案的原因：

答：因為分數的除法被除數上下要顛倒，顛倒後變假分數×5就比較大

R：你這題目看得懂嗎？

S9：嗯哼，看得懂啊！

R：那你可以告訴我，它要你解什麼嗎？

S9：就是看那兩個算式，哪一個算出來的答案比較大？

R：好，你再看一下你當初選答的原因，那時候你是想要用什麼概念來解這個題目呢？

S9：就是那時剛教過的分數除法，因為剛好就可以用這概念來解題。

R：好，你唸一下當初寫的原因。

S9：(唸出選答原因)

R：好，你的意思是說 $\frac{7}{9} \div 5 = \frac{9}{7} \times 5$ *嗎？*

S9：是。

R：你為什麼要想用這概念來做這題目呢？

S9： 因為就剛好看到，那時又剛教完，所以就想到了。

R： 你有精算出答案嗎？

S9：沒有。

R： 要不然你怎麼比？$\frac{9}{7} \times 5$*，第二個是* $\frac{7}{5} \div 9 = \frac{5}{7} \times 9$*，你要比這兩個乘法算式，對不對？*

S9： 嗯。因為就 $\frac{9}{7}$ *比* $\frac{5}{7}$ *還要大，所以算出來就大一點。*

R： 好，所以你是比被乘數？

S9：嗯。

R: 但是你沒有看到乘數嗎？一個是 × 5，一個是 × 9，這個結果不確定性很大。

S9： (笑)

R： 在這裡看來，你當初是有想要用紙筆計算以外的策略來解題，如果今天沒有要你不可以用紙筆算，你會不會用紙筆算出答案呢？

S9：會。

R： 你還是習慣寫算式再算出答案。

S9：（點頭）

R： 談到這裡，你有發現你解題的概念有需要修正嗎？

S9：（點頭）

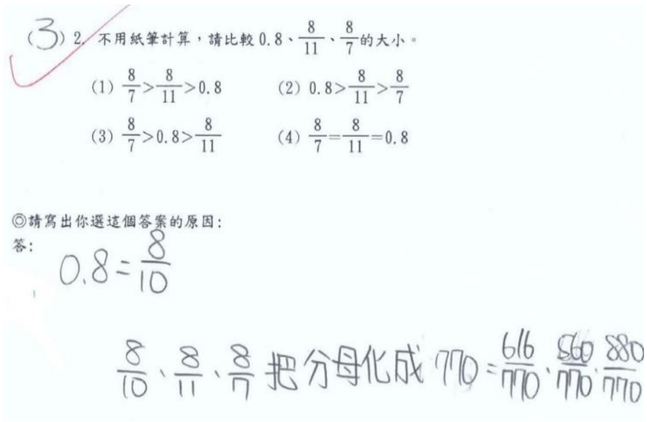
R： 怎麼修正？ $\frac{7}{9} \div 5 = \frac{9}{7} \times 5$ *嗎？*

S9：（搖頭）

R： 要不然是什麼？

S9：應該是 $\frac{7}{9} \times \frac{1}{5}$*。*

（五） 刻板精算迷思類型(T05): 樣本在問卷中對題意的了解及解題的運思都沒有問題， 但於原因說明中以運算式作答、直接以計算式精算出最後答案、四則計算出錯或是表明以「心算」來作答，皆被歸類於刻板精算迷思類型。



(3) 2. 不用紙筆計算，請比較 0.8、$\frac{8}{11}$、$\frac{8}{7}$ 的大小。

(1) $\frac{8}{7} > \frac{8}{11} > 0.8$　(2) $0.8 > \frac{8}{11} > \frac{8}{7}$

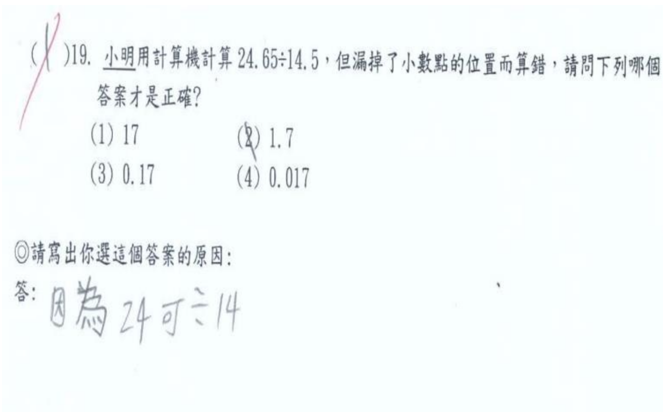
(3) $\frac{8}{7} > 0.8 > \frac{8}{11}$　(4) $\frac{8}{7} = \frac{8}{11} = 0.8$

◎請寫出你選這個答案的原因:

答: $0.8 = \frac{8}{10}$

$\frac{8}{10}$、$\frac{8}{11}$、$\frac{8}{7}$ 把分母化成 $770 = \frac{616}{770}$、$\frac{560}{770}$、$\frac{880}{770}$

（六） 粗心錯誤類型(T06): 樣本對題意的了解及解題的運思都沒有問題，文字說明中出現筆誤，但選答是正確的，或是解題的運思合乎邏輯且文字說明都無誤，但選答卻出現錯誤，皆列為粗心錯誤類型。


(1)19. 小明用計算機計算 24.65÷14.5，但漏掉了小數點的位置而算錯，請問下列哪個答案才是正確?
(1) 17　(2) 1.7
(3) 0.17　(4) 0.017
◎請寫出你選這個答案的原因:
答: 因為 24 可÷14

R：你題目看得懂嗎?

S11：（點頭)

R：你可以告訴我你要做怎樣的解題嗎？

S11：就小明弄錯小數點，所以要知道哪一個答案才對。

R：它要你寫出正確答案，但又不要你…

S11：計算。

R：你看一下當初選答原因，再回想一下你想用什麼想法解這題目？

S11：我不會。

R：不會？是用猜的嗎？

S11：嗯。

R：好，你為什麼會猜（1）？

S11：我是猜（2）

R：你寫（1）啊。

S11：ㄟ，我為什麼劃（2）寫（1）呢？

R：你把（2）劃掉，就是去掉（2）這答案，該不會你又粗心，劃掉的答案就是你要選的答案吧？

S11：（笑）對啊！

R：那應該不是不會，你再仔細看一下選答原因，若不會，用猜的，還有理由可講，但如果你是粗心，表示你是有概念的。

S11：嗯，可是好像沒有關係。

R：你再看一下，可能隔一段時間忘了，照你寫的思維，你再想想你是想用什麼概念來解這題目？

S11：喔！把 24.65 去掉後面小數變成 24，把 14.5 去掉後面小數變成 14 再除。

R：你是取概數？

S11：嗯，24 除以 14 怎麼算整數都是 1，所以我覺得是（2）。

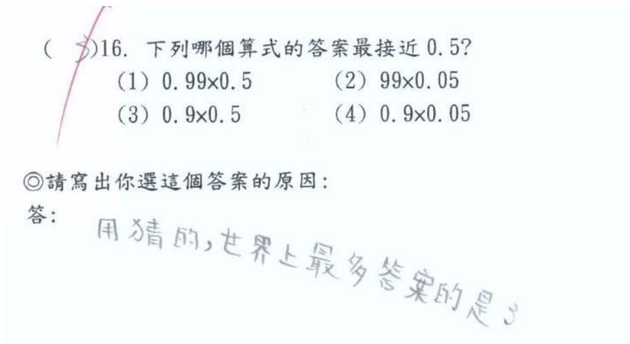
R：所以你是會的，你取概數再除，你覺得是（2），所以劃掉（2）要選(2)，卻寫成（1）。

S11：嗯。

R：：所以你是知道，但粗心寫錯了。

S11：嗯。

（七）猜答案錯誤類型(T07): 樣本的答題原因，寫為”猜的”、”覺得”、”不知道”或是與猜測有關的文字敘述……等錯誤均歸類於猜答案錯誤類型。


(3)16. 下列哪個算式的答案最接近 0.5?
(1) 0.99×0.5　(2) 99×0.05
(3) 0.9×0.5　(4) 0.9×0.05
◎請寫出你選這個答案的原因:
答: 用猜的，世界上最多答案的是3

R：這題目你看得懂嗎？

S45：題目看得懂。

R：你知道它要解什麼嗎？

S45:就是算出來的答案哪個比 1 大。

R：你看一下你當初寫的選答原因，你可以告訴我你的想法嗎？

S45：啊，就……用猜的。

R：為什麼要猜的？

S45: 就……，就……。

R：你懂題目，但你不會……

S45：就數字很大，又不能計算，就放棄。

R：喔，數字很大，然後你又覺得很難算，所以放棄。

S45: 嗯！而且又不能計算

R：喔！而且不能計算，所以你就用你的經驗法則去猜。

S45：對！

R：你真的很坦白，〝世界上答案最多的是 3〞。

S45:是真的。

R：你是依經驗統計過嗎？

S45：對，人家有統計過。

R：這是網路上的訊息嗎？

S45:這是真的！

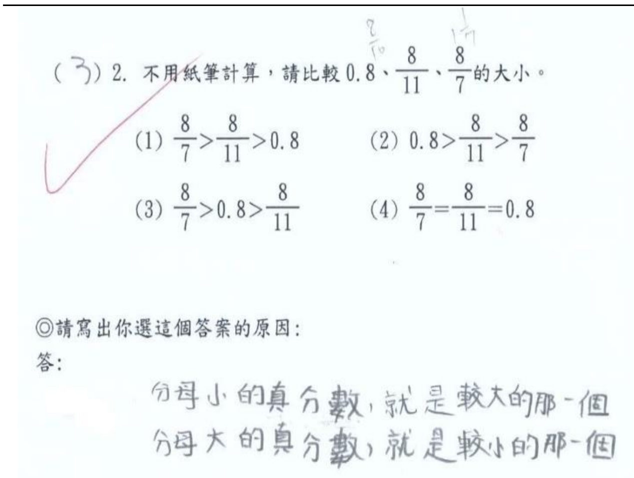
R：你從哪裡知道的？

S45：電視上還有網路上。

R：你自己有證實過嗎？

S45:嗯！還真的蠻多(3)的。

（八）推理表述能力薄弱錯誤類型(T08): 樣本在解題時，了解題意並且能掌握適當數感解題概念或策略，但原因書寫時寫的很簡單，而使內在數學思維的闡述不完整或是文字敘述表達不完整，需透過研究者的問句引導才能說出自己解題運思的過程，皆歸類為推理敘述能力薄弱錯誤類型。


(3) 2. 不用紙筆計算，請比較 0.8、$\frac{8}{11}$、$\frac{8}{7}$ 的大小。（0.8 上方手寫 $\frac{8}{10}$，$\frac{8}{7}$ 上方手寫 $1\frac{1}{7}$）

(1) $\frac{8}{7}>\frac{8}{11}>0.8$ (2) $0.8>\frac{8}{11}>\frac{8}{7}$

(3) $\frac{8}{7}>0.8>\frac{8}{11}$ (4) $\frac{8}{7}=\frac{8}{11}=0.8$

◎請寫出你選這個答案的原因：

答：

分母小的真分數，就是較大的那一個

分母大的真分數，就是較小的那一個

R：這個題目你看得懂嗎？

S49：可以。

R：好，你告訴我它要叫你做怎樣的解題？

S49：就是要我們比較大小。

R：好，你再看一下你當初所寫的選答原因，你可以告訴老師你的想法是什麼嗎？

S49：因為分母比較小的，我覺得就是比較大的那一個，分母比較大就是分比較多等分，而且它的分子都是一樣，所以我覺得比較小，然後這個（指 $\frac{8}{7}$）是假分數。

R：你在題目數字上寫$1\frac{1}{7}$，是你想把它變成帶分數來看？

S49：嗯。

R：你是把 0.8 化成分數，又因 $\frac{8}{10}$ 和 $\frac{8}{11}$ 是真分數，所以先比較，$\frac{8}{7}$ 再另外比。

S49：嗯。

R：你為什麼要把 0.8 換成分數來比呢？

S49：因為這樣比較好看得懂，然後我也比較了解這方式。

R:所以有 3 個數字 $\frac{8}{10}$、$\frac{8}{11}$ 和 $1\frac{1}{7}$，先比較 $\frac{8}{10}$ 和 $\frac{8}{11}$，最後再跟 $1\frac{1}{7}$比？

S49：對，因為它是帶分數，大於 1，比這兩個數字還大。

R：好，從你的描述中，代表你是懂得，但你沒把 $\frac{8}{7}$ 的比較寫在選答原因裡，要注意喔！

進一步分析統計所有受測樣本，統計出「國小六年級學童數感能力分析問卷」21 題試題的錯誤類型之錯誤人次與錯誤排行彙整如表七所示。

表七「國小六年級學童數感能力分析問卷」樣本錯誤類型情形統計表

錯誤類型	答錯題號	答錯題數	各類型錯誤人次	各類型每題平均錯誤人次	錯誤比例	錯誤排行
T01	Q1、Q3、Q4、Q8、Q13、Q14、Q16	7	21	3	6.2%	5
T02	Q1、Q2、Q6、Q8、Q10、Q12、Q17、Q20、Q21	9	118	13.11	27.1%	1
T03	Q4、Q7、Q8、Q9、Q10、Q11、Q15、Q16、Q18、Q19、Q20	11	126	11.45	23.7%	2
T04	Q1、Q4、Q5、Q9、Q21	5	13	2.6	5.4%	7
T05	Q1、Q2、Q3、Q4、Q5、Q6、Q8、Q9、Q10、Q12、Q14、Q15、Q16、Q17、Q18、Q19、Q20、Q21	18	180	10	20.7%	3
T06	Q1、Q2、Q4、Q7、Q9、Q10、Q15、Q16、Q18、Q19、Q21	11	29	2.64	5.5%	6
T07	Q1、Q2、Q3、Q4、Q5、Q6、Q7、Q8、Q9、Q10、Q11、Q12、Q15、Q16、Q17、Q18、Q19、Q20、Q21	19	64	3.32	7%	4
T08	Q1、Q2、Q3、Q4、Q5、Q6、Q7、Q8、Q10、Q12、Q13、Q15、Q17、Q20、Q21	15	32	2.13	4.4%	8
合計			583	48.3	100%	

說明：

1. $各類型每題平均錯誤人次 = \dfrac{各類型錯誤人次}{錯誤題數}$

2. $錯誤比例 = \dfrac{各類型每題平均錯誤人次}{各類型每題平均錯誤總人次} \times 100\%$

由表七，可以發現樣本學童以分數的概念迷思錯誤類型（T02)的平均錯誤人次最多，錯誤比例為27.1%，排行第二是小數概念迷思錯誤類型，錯誤比例為 23.7%，排行第三是刻板精算迷思類型，錯誤比例為 20.7%，本研究結果與黃琮智(2008)的研究比較，其錯誤類型排行第一傳統算則型，而本研究的刻板精算迷思類型排行第三，但都是占有相當大的錯誤比率；在本研究的錯誤類型分類中，整數概念迷思錯誤類型、分數概念迷思錯誤類型、小數概念迷思錯誤類型與先備知識缺乏錯誤類型均與數感概念迷思有關，將這四個錯誤類型的錯誤比例合併共計 62.4%，此結果謝宗育(2011)的研究比較，其概念迷思型排行第一，有一致性的結果。

在分數的概念迷思錯誤類型中，樣本於答題的表現會有不瞭解分數的意義與關係、缺乏部分與全部與等分與等值的分數概念或分數四則運算的概念混淆，所以很多樣本在以數感解題時，會有分母愈大分數值就愈小、分子愈大分數值愈大的單一考量的概念迷思，在解題時會因概念迷思而答題錯誤，還有分數的加法會因習慣先通分成同分母而出現與分數乘法混淆的迷思，分數的除法算則與乘法算則的混淆亦常見於犯此錯誤類型的樣本問卷的選答原因中。

小數概念迷思錯誤類型中，樣本學童會有以下的錯誤迷思概念，如不瞭解小數位值的概念、小數乘法的積與小數除法的商之小數位數的觀念混淆，或將整數比大小的學習遷移到小數概念中而有小數位數較多的數會比較大的迷思，另外當小數相乘時，樣本會有只要小數位數多且各位數中的數字愈大，乘出來的積就會很大的迷思，也有任何數乘以小數後數值會變小的迷思概念。

以上兩種錯誤類型均是屬於概念性迷思錯誤類型，從樣本的解題說明與晤談中，研究者發現有這種迷思類型的樣本具有自我思考的過程與架構，但因錯誤的數感概念或是使用了未能符合題旨的數感概念與策略，簡單來說就是數感錯誤與數感策略誤用兩種情形，這兩種錯誤是伴隨產生、相互影響的，因樣本誤用數感，以致無法正確求解，也就有了數感迷思。概念性錯誤類型會影響到數學學習的品質，更會妨害數感能力的培養，甚至因為教學現場實施個別診斷的困難，加上於迷思是第一印象造成，不易修正，而使教師在發現學童有迷思時，需經長時間的觀察與互動以進行補救教學，才能矯正其數感概念的迷思。

比對問卷內容，可發現排行第三的刻板精算迷思類型的題型均類似計算題或應用題的題型，錯誤比例佔有相當高的比例，可見樣本對於有運算式或應用問題的題型，有難以跳脫傳統算則思維的解題反應。另外，由表六「國小六年級學童數感能力分析問卷」樣本錯誤類型情形統計表的統計數據中，研究者發現 21 題目中有 18 題有刻板精算迷思類型，比例之高，顯現出樣本學童習於傳統數學教育之制式的列式計算解題策略，也不難看出本研究之理論向度(三)對瞭解運算對數字的意義及其影響的能力平均數是所有向度中最高的結果；但從晤談中，研究者也發現部分樣本學童在平時的學習雖然習慣傳統數學算則的解題思維與模式，因而還未能發展出自我思考的數感能力，但並不代表他們是沒有能力發展出數感概念與策略，只因他們常只相信算則計

算的答案，而不相信自己的想法，造成解題時習慣於機械式的列式運算，而未能將數學的學習融入自己的想法中，但是樣本學童若能打破其慣有學習數學的刻板模式，相信也能擁有數感能力。

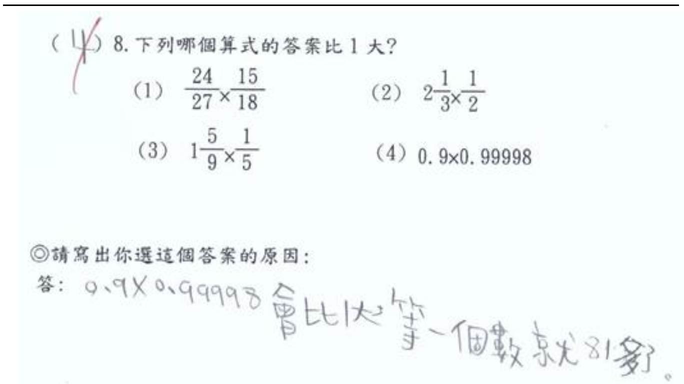
三、數感能力解題錯誤形成原因分析

許清陽（2006）認為，兒童在面臨不需紙筆計算的情境時，除了要有數感認知的基本知識及瞭解數感認知的環境要求，還要有數感認知的策略知識，才能有效的答題。是故，擁有數感能力的人，能不使用紙筆計算，運用各種形式的數字瞭解方式做數學上的判斷，亦能選擇有效的策略處理所面對的數字情境。

由樣本的答題中發現，就算是錯同一題的學童，出錯的部分也不盡然完全相同，這是因為經由不同訊息處理過程而導致不同解題的呈現。為了瞭解學童錯誤產生的背後原因，以俾進一步給予教師教學時的參考，藉由樣本學童在「國小六年級學童數感能力分析問卷」測驗中的答題情形與晤談的對話加以分析，以瞭解學童在作答過程的思維，並歸納出樣本在測驗中解題時有以下五種可能錯誤原因：

（一）數感概念迷思:分成數感概念錯誤與數感策略誤用兩部分來討論。

1. 數感概念錯誤：學童採用數感能力解題時，因為未具備有正確的數感概念而解題錯誤，此錯誤來自於學童學習數學的歷程中，有認知上的誤差，而導致其對數字有偏差的認知。


（4）8. 下列哪個算式的答案比 1 大?

(1) $\frac{24}{27}\times\frac{15}{18}$　(2) $2\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

(3) $1\frac{5}{9}\times\frac{1}{5}$　(4) 0.9×0.99998

◎請寫出你選這個答案的原因:

答: 0.9X0.99998 會比1大，第一個數就81多。

R：這題目你看得懂嗎？

S5：看得懂。

R：你知道它要你做什麼樣的解題嗎？

S5：題目乘出來的商比 1 大。

R：澄清一下，不是商,乘法的答案是積，除法才是商。好，請你看一下你寫答的原因，你是想用什麼想法來解題？

S5：是……。

R：你的想法是 0.9 × 0.99998 算式中，因為最高位 9 × 9 算出來是 81，已經比 1 大很多了，是嗎？

S5：是。

R：可是這兩個數都是小於 1 的小數耶。

S5：嗯……。

R：你知道這個算式的積有幾位小數嗎？

S5：6 位。

R：所以你認為 9 × 9 = 81 已經大於 1，9 × 99998 就更大了,所以不管乘起來有幾位小數都一定大於 1，是嗎？

S5：對，因為以往乘起來就是很大。

R：好，你再來看一次 0.9 × 0.99998，算起來有比 1 大嗎？

S5：沒有。

R：為什麼？

S5：因為它是 6 位小數。

R：它確實乘起來是 6 為小數，但乘起來一定比 1 小嗎？

S5：嗯……。

R：還有其他解題的想法嗎？

S5：嗯……。

R：老師提示一下，決定乘法積的大小是哪兩個數？

S5：被乘數和乘數。

R：你看它們兩個有什麼共通點？

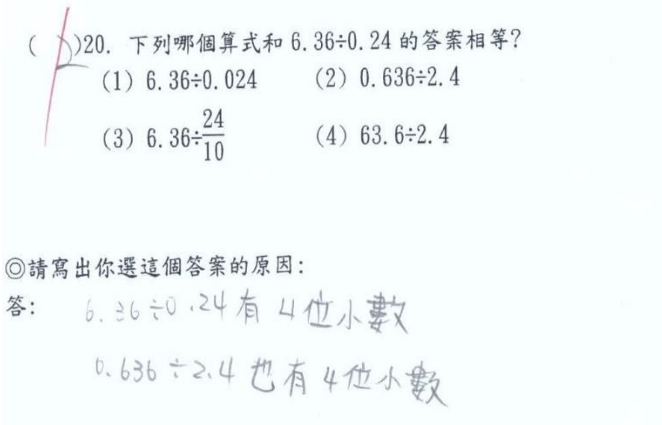
S5：喔…，兩個都比 1 小，乘起來比 1 小。

R：你確定？

S5：對呀！兩個比 1 小，乘起來更小。

樣本學童 S5 在測驗時的解題策略是根據以往整數乘法的經驗，9 乘以 99998 很大，所以 0.9 × 0.99998 的結果一定大於 1，他先以數感直覺先判斷再作答，因為以往的正整數乘法經驗遷移至小數乘法的學習，再歸納建構成自我的小數乘法概念。當研究者要他再看一下算式，他便根據直式計算經驗回答因為它是 6 位小數，再進一步問他是否確定比 1 大時，樣本學童 S5 卻說不出個所以然。接著，研究者希望他再想其他解題策略時，一開始是想不出來，經研究者提示後，他便能說出另一個解題的策略，可見樣本學童 S5 曾經有這樣的數感解題經驗，但因他僵化於直式計算的思維，數感能力的發展因而受到阻礙，導致他的數感解題能力的缺欠。

2. 數感策略誤用：學童在解題過程，採用了正確的數感概念，但卻不是最適合的數感解題選擇，其誤用了自己對於數字的感覺，或因學童對於數感能力的培養尚未成熟，而產生數感策略誤用的現象。


(2)20. 下列哪個算式和 6.36÷0.24 的答案相等?
(1) 6.36÷0.024 (2) 0.636÷2.4
(3) $6.36\div\frac{24}{10}$ (4) 63.6÷2.4

◎請寫出你選這個答案的原因：
答： 6.36÷0.24 有 4 位小數
0.636÷2.4 也有 4 位小數

R：這題目你看得懂嗎？

S45：看得懂。

R：好，那它是要你做什麼樣的解題呢？

S45：嗯，就是 6.36 ÷ 0.24 和下面哪一個選項的答案是一樣的。

R：你再看一下當初你所選答的原因，你想想，你是要用什麼樣的概念來解這個題目呢？

S45：就是題目 6.36 ÷ 0.24 它有 4 位小數，然後 0.636 ÷ 2.4 也有 4 位小數。

R：好，你所說的「4 位小數」是小數除法的概念嗎？

S45：嗯…，就…，欸…。

R：如果是除法，應該是你要把它們…。

S45：抵銷。

R：所以你是誤用了。

S45：用到乘法了！

R：你是誤用到小數乘法的概念，對不？發現了喔。

S45：對呀！

R：如果用小數除法的概念來想，你覺得要怎麼做？

S45：答案是（4）

R：為什麼？

S45：因為 6.36 ÷ 0.24，就把小數位都抵銷了，63.6 ÷ 2.4 也把小數位都抵銷了。

R：老師想知道你為什麼會誤用小數乘法的概念來解小數除法的題目呢?

S45：就…。

R：你當時是懂題目，也知道它是除法算式嗎？

S45：是，但就不小心弄混了。

樣本學童 S45 在測驗時試圖以數感能力來解題，可能是因題目題型平日大部分都是以直式計算題來呈現，不太有機會發展有別於傳統算則之其他數感策略，所以在測驗時誤用了小數乘法的小數位數來判斷除法的商，因而選答錯誤。

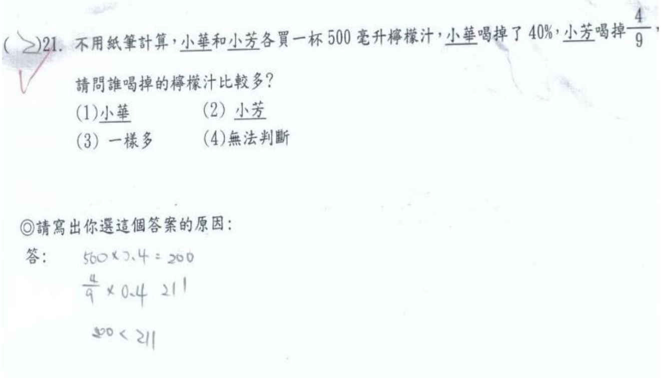
綜合上述兩種錯誤類型，從問卷與晤談中，不難發現這兩種類型的錯誤是伴隨產生的，由於數感策略的誤用，使學童無法正確求解，而產生的數感的迷思概念。數感迷思不但影響學童的數學學習成效，更有礙學童的數感能力的發展，而且學童一旦形成偏差的認知，若非能在第一時間發現而調整，則不易修正，影響之深，是教師於教學設計與實施時，須加以正視、考量的問題。

（二）習慣列式精算的學習

本研究之問卷主要目的是測驗學童的數感能力，所以不希望學童是以較為複雜的列計算式進行解題

並精算出答案，而是要求樣本學童能經由自我思考而得的解題策略來應答，因此，於答題原因上註明的解題過程，若單單只有列計算式與答案，而並未有自己的想法的答題原因敘述，一律列為錯誤類型。

在本研究的錯誤類型分類中，刻板精算迷思類型的錯誤比例為 20.7%，高居第三，占有很大的比例，尤其是遇到有計算式的題目，雖然已於作答前一再強調，請勿以列式運算，但仍有不少的樣本採用傳統算則列式去精算出答案。


(2)21. 不用紙筆計算，小華和小芳各買一杯 500 毫升檸檬汁，小華喝掉了 40%，小芳喝掉 $\frac{4}{9}$，請問誰喝掉的檸檬汁比較多?

(1)小華　(2) 小芳

(3) 一樣多　(4)無法判斷

◎請寫出你選這個答案的原因：

答：　$500 \times 0.4 = 200$

$\frac{4}{9} \times 0.4$　211

$200 < 211$

從樣本 S45 的作答來看，他採的解題策略是以列式精算出答案，再比較出其大小；但當中有列錯算式和計算錯誤的情形，為了要了解樣本 S45 採列式精算的原因，研究者在晤談中做了提問，如下所示。

R：你這題是採用列計算式並算出答案，但卻列錯式，也計算錯，老師想問你為什麼要用這方法解題呢？

S45：因為他們兩個都買 500 毫升，喝掉 40%和 $\frac{4}{9}$ *啊。*

R：所以你是根據以往的的經驗，都是用計算解題囉？

S45：嗯。

R：其實照你列式的概念，你來看一下 $500 \times 40\%$ *跟* $500 \times \frac{4}{9}$ *這兩個算式在比什麼？*

S45：40% 和 $\frac{4}{9}$ *。*

R：需要精算出算式最後答案再比嗎？

45：不必。

R：40% 和 $\frac{4}{9}$ *哪一個比較大？*

S45：$\frac{4}{9}$ *。*

R：所以誰喝掉比較多？

S45：小芳。

R：所以不必算的這麼累，下次解題時，可以注意一下，不必太倚賴計算式，你就能正確而快速的解題。

S45：嗯。

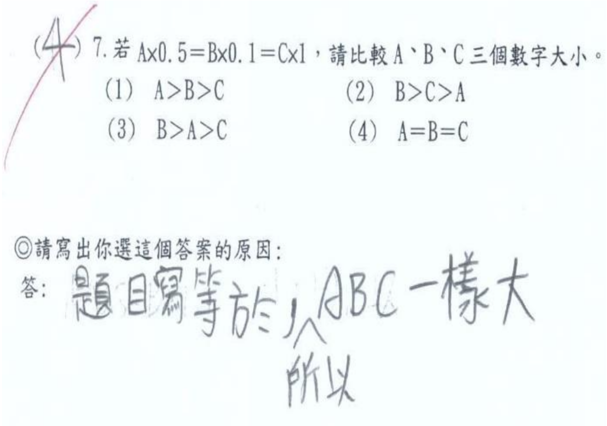
R：老師再問一下，你會有不列算式計算，就不會解題的想法嗎？因為看你在別題有未知數的情形，也很努力朝計算的方向來解題。

S45：嗯。

在刻板精算迷思類型中，甚至是其他錯誤類型中，都發現樣本有著列式精算的魔咒，如不計算或心算出最後答案，總覺得自己不會解題或答題不正確，因而不敢去嘗試其他數感策略解題，甚至有平常學業成績高的學童是因為不能採用列式精算策略，自覺不會解題而選擇空白不作答，但經過研究者引導，也證實如樣本 S45 的晤談中顯示，學童還是有發展其他數感解題策略的機會，只是從來沒這樣的學習經驗而已。

（三）消極猜測

猜答案型的錯誤類型中，常見學童並未對於題目有任何的了解就寫下答案，而且在選答原因上，很多都是留下「用猜的」、「覺得」、「我不知道」類似猜測的字詞，或是抄寫題目中某個訊息、把選答的選項再寫一次，比比皆是。


(4) 7. 若 Ax0.5=Bx0.1=Cx1，請比較 A、B、C 三個數字大小。
(1) A>B>C (2) B>C>A
(3) B>A>C (4) A=B=C

◎請寫出你選這個答案的原因:
答: 題目寫等於，所以 ABC 一樣大

第七題的解題概念是運用小數乘法的概念去比出三個數字的大小，從樣本 S48 的作答來看，猜測的成分居多，為了要了解樣本 S48 作答運思的真實情況，研究者在晤談中做了提問，如下所示。

R：題目你看得懂嗎？

S48：比 A、B、C 的大小。

R：你看一下，當初寫的選答原因，你是想要用什麼想法解這個題目？

S48：因為它有「＝」。

R：因為題目中有「＝」，那老師想請問你是用猜的嗎？因為題目中除了等號還有其他符號與數字啊。

S48：嗯，是用猜的。

R：你不知道怎麼寫嗎？

S48：嗯。因為三個式子都等於。

R：你有想過三個數都一樣，例如都是 1，代入三個式子中，它的等號關係會成立嗎？

S48：沒有。

R：為什麼沒有想？

S48：因為很趕。

R：寫的時間不夠嗎？

S48：因為還要想，就會覺得時間不夠。

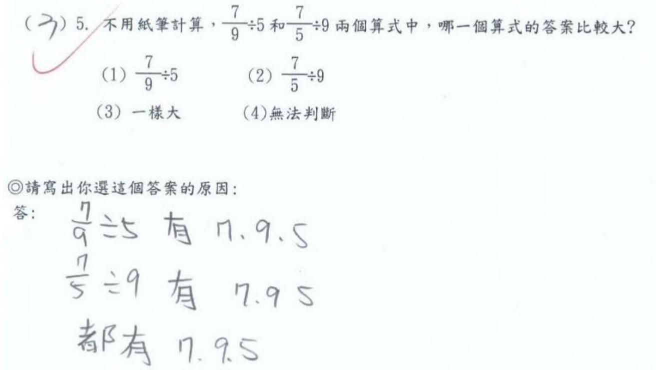
晤談中，樣本 S48 對於第一眼感覺不會的題目，因覺得需想很久，就以猜測來應答；但當研究者以乘法的概念切入與他對談時，發現他是有概念，但是他以往的解題的題型都是只有兩個算式來判斷未知數大小的題型，所以他就直接放棄，顯示樣本 S48 在面對新的數學情境，有解題的信心與耐性不足之情況。

經過比對問卷及晤談對話，出現這種答題型態的樣本，幾乎都是在數學學習上表現低成就的學童，這種答題方式是他們最常寫出來的。這類學童大部分都有習得無助感，在課堂上對教師所講解內容不了解，也不會試著去釐清，漸漸對數學的學習失去興趣與信心，自然而然，對於問卷內容就會抱持著有寫就好的心態。

研究者整理統計數據後，發現多數的樣本在於寫數感能力問卷時，仍是中規中矩的看完題目再作答，於各題錯誤類型分析統計表可看出此類型的錯誤比例偏低；而且研究者發現，這些逃避型的錯誤，總來自於相同的少數樣本之問卷中，可知這類型的錯誤，並非大多數樣本的錯誤類型，而是少數樣本錯誤的原因。

（四）缺乏數學推理表述的能力

本問卷之作答方式，除了選擇預選之答案外，還要求樣本先於答案確認後，至原因區撰寫下為何選此答案的原因，整理完問卷與晤談資料，研究者深深覺得樣本筆述表達數學推理思維的能力薄弱，平時，學童寫選擇題時，都會顯得很愉悅且作答速度快，但在寫本問卷時，因要書寫原因，卻因平時都是口頭發表解題想法且少有用筆寫的經驗而裹足不前，導致筆述解題推理過程的闡述不完整或是表達的數學概念條理不連貫，甚至因而選答錯誤的情形都會出現。在晤談時，樣本需透過研究者的問句引導才能說出解題運思的概念，甚至告訴研究者用寫的很難將腦袋裡所想的解題概念全然表達出來。


(2) 5. 不用紙筆計算，$\frac{7}{9}\div5$ 和 $\frac{7}{5}\div9$ 兩個算式中，哪一個算式的答案比較大?
(1) $\frac{7}{9}\div5$ (2) $\frac{7}{5}\div9$
(3) 一樣大 (4)無法判斷

◎請寫出你選這個答案的原因:
答: $\frac{7}{9}\div5$ 有 7.9.5
$\frac{7}{5}\div9$ 有 7.9 5
都有 7.9.5

R：你回想一下當初解題的想法，你是想用什麼概念解這個題目？

S18：因為 $\frac{7}{9} \div 5$ 是 $\frac{7}{9} \times \frac{1}{5}$，$\frac{7}{5} \div 9$ 是 $\frac{7}{5} \times \frac{1}{9}$。

R：然後呢？

S18：它們兩個式子中，都有 7、9、5 啊！

R：只要式子中有 7、9、5，就不管它們是在分子或分母的哪一個位置，結果都是一樣大，你意思是這樣嗎？

S18：嗯…。

R：比如說 $\frac{9}{7} \times \frac{1}{5}$ 跟 $\frac{7}{5} \times \frac{1}{9}$，兩個式子中都有 7、9、5，它們會一樣大嗎？

S18：不會。

R：但照你的選答原因的寫法，這樣也會一樣大啊。

S18：喔！應該是我一開始看到它 $\div 5$ 是 $\times \frac{1}{5}$，所以分母是 9×5，分子是 7×1，另一個分母也是 5×9，分子也是 7×1，結果會一樣，對，對，對，就是這樣。

R：你當初沒想到原因這樣寫，可能會有老師這種說法吧！

S18：嗯！

R：所以要更精準的說出……？

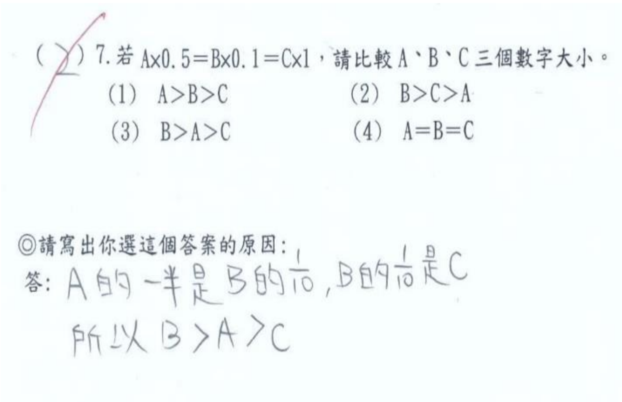
S18：兩個式子的分子和分母乘出來的數值會一樣。

R：所以下次寫原因敘述要把它寫的完備，說理要切中要點，不然會像這樣有偏差喔！

訪談中，研究者發現樣本 S18 解題數感策略是恰當的，但寫選答原因過於簡略而無法完整的表達其運思的過程，訪談的最後，他已能流暢且完整的說出解題想法，也知道原因書寫的缺漏，研究者認為缺乏數學推理表述能力的學童具備有數感能力，相信透過在數學課堂上進行課室的討論與發表、習寫題目時做類似的練習，必能培養其數學推理表述的能力。

（五）缺乏檢核錯誤的能力

整理完所有問卷與晤談資料，研究者特別將粗心錯誤類型歸因為「缺乏檢核錯誤的能力」，犯這類粗心錯誤的樣本，幾乎都是在訪談時才發現自己的粗心，反應也都如出一轍:「不小心」、「寫太快，沒注意」、「我會啊！怎麼會這樣！」…等。


(2) 7. 若 A×0.5=B×0.1=C×1，請比較 A、B、C 三個數字大小。

(1) $A>B>C$ (2) $B>C>A$

(3) $B>A>C$ (4) $A=B=C$

◎請寫出你選這個答案的原因：

答: A的一半是B的$\frac{1}{10}$, B的$\frac{1}{10}$是C

所以 $B>A>C$

從樣本 S41 選答原因中，很明顯看出它的解題概念是對的，但最後選擇的答案卻不是如原因所寫的，針對此矛盾，研究者詢問了樣本 S41，如下所示。

R：老師請你看一下問卷，當初選的答案是（2），你仔細看一下你選答的原因，你寫的是 $B > A > C$，應該是選（3），但你最後寫的卻是（2）$B > C > A$。

S41： 啊！看錯了，應該是（3）。

R：看錯了喔，老師問一下，你寫問卷的時間夠你思考嗎？

S41：夠。

R：所以是粗心囉，你平常考試會這樣嗎？

S41：大考就會比較謹慎，小考會粗心常錯。

R：那要注意喔，粗心不太好。

S41：嗯。

與樣本的晤談對話中，研究者發現，學童解題時對於所作的說明與所寫的答案沒有合理性的檢核習慣

或策略，以至於解題的數感概念、策略都對，卻在填答時出錯；另外，學童面對考試的心態也有關，平時練習或平時考，比較沒有壓力，粗心出錯的頻率較高，如果是段考，態度會比較謹慎，粗心的比例就會降低。長久以來,「粗心」經常是發生在每個學童身上無法避免的問題，在某些學童身上更是無法有更積極的作為去面對它、解決它，此種錯誤非因學童不懂而是沒有發現錯誤的能力，就如晤談的學童中，面對粗心而造成的錯誤，反應都是忽略了或已檢查但卻沒發現錯誤，表示學童在檢核答案時有疏漏或無法察覺錯誤的情形。

研究者於統整樣本在數感能力問卷上發生的錯誤類型時，發現數感概念迷思型的錯誤類型是最多樣本會發生的，其包含了整數概念迷思錯誤類型、分數概念迷思錯誤類型、小數概念迷思錯誤類型與先備知識缺乏錯誤類型，將這四個錯誤類型的錯誤比例合併共計 62.4%，超過半數，比例相當高，研究者分析後，認為概念迷思型的錯誤是最重要、最難糾正的錯誤類型，因為第一印象是最深刻的，所以這一類型的錯誤應該想辦法及時進行補救教學，更需要對症下藥，針對此類型的錯誤進行了解，以防止學童產生這一類型的錯誤概念，建立正確的數感能力。

其次，在概念迷思型的四項錯誤類型中，分數概念迷思錯誤類型在所有八項錯誤類型中，其錯誤比例排行第一，為 27.1%，此結果顯現，當學童對於分數的意義與加減乘除運算相關概念混淆不清時，很容易利用錯誤的觀念進行解題，因此在問卷中分數相關的題目，答題情況就會表現不佳，尤其是分數的意義的迷思與分數的乘除運算的混淆之錯誤的出現比例頗高，在問卷中，學童常出現單以分母大小或以單以分子大小來判定分數大小的迷思，在分數的基準量進行比較分數的大小或運算的表現也相對較弱，這結果與研究者於教學現場所遇到狀況相符，如果先前的分數概念學習的過程中出現錯誤的觀念未及時導正，將會干擾後續的學習，所以更遑論發展相關的數感策略來解題。

錯誤比例排行第三的刻板精算迷思類型，其錯誤比例為 20.7%，從此數據可以看出犯此錯誤類型的樣本為數不少， Mack (1990)指出學童對於算則的知識經常是錯誤而不自覺的，程序性的知識經常阻礙學童自己發明的方法，學童只是規則的計算而忽略了情境脈絡中的問題內容；楊德清(2002)提到對這些學童來說，數學是一些分割、不連貫的事實和公式，學習時是必須加以記憶和練習。當學童在解決數字問題時，他們必須背誦一連串的公式以應付考試。探究其原因乃是由於學童為考試而學習，只知如何運用學校中所學得之標準計算法則，而非真正的對數字瞭解，即缺乏數感。研究者從樣本學童問卷與晤談資料也發現，此錯誤類型學童常只相信精算出來的答案，而不相信自己的想法，習於機械式的列式精算來解題，而未能發展出屬於自己數感認知。

猜答案錯誤類型的錯誤比例雖是排行第四，在 21 題問題中，有 19 題出現猜答案的情形，但其錯誤比例已大大的降低至 7%，顯示大部分樣本都會盡力去完成問卷測驗；從問卷資料去比對樣本的學業成就發現，有大部分樣本的課業表現不佳，這類學童大部分都有習得無助感，在課堂上對教師所講解內容不了解，也不想試著去釐清，漸漸對數學的學習失去興趣與信心，再加上這份問卷不影響學業成績，對於問卷內容就會抱持著有寫就好的心態。

本研究統計結果，粗心錯誤類型的錯誤比例為 5.5%，比例雖低，但卻是一項很難避免又幾乎發生在每個學童身上的錯誤，其原因不外乎是忽略或已檢查卻沒發現自己的錯誤,即缺乏發現錯誤的能力。依研究者多年教學的經驗，作答粗心的學童，原因多元，與個人特質或作答情境都有關，平時考試練習較常出現，個性比較大而化之、個性急切或自我要求較低的學童也較常出現。

最後一項推理表述能力薄弱錯誤類型，其錯誤比例排行第八，從研究問卷資料發現這類學童雖具有數感能力，但表述推理能力的缺乏，造成作答上的缺漏，探究其原因是除了學童少有二階段測驗的作答經驗外，平時的數學學習也較少有筆述表達推理的練習,研究者認為只要教師在教學時能作調整,讓學童於課堂上多一些口說討論的互動與紙筆的表述練習，問題一定有所改善。

在研究者十多年來在教學現場的觀察，雖然教改呼聲不斷，數學課程也不斷的變，以往的數學教學重視算則的機械式演練與計算技能的熟練比重雖稍有降低，但在升學主義盛行之下，大部分的老師與家長始終認為數學能力強代表計算速度快，能在短時間解出精確的答案；所關心的是考試成績的高低，在乎的是學童對教材精熟與否；不斷的複習和演算成了提高數學成績的不二法門，造成學童不了解數字真正的內涵，無法將數字意義化，面對新的數學問題時只能依賴紙筆計算及老師所教的算則，無形中，數學學習的主動性和自覺性隨著成績低落漸漸消磨，進而喪失數學學習的樂趣。

如何解決國內數學教育所面臨到的問題? Burns（1994）提到數學的教學要做改變，數學教學中太強化標準算則，則會阻礙並干擾學童的學習，讓學童認為學數學是要學這些步驟規則。曾陳密桃(l990)指出學童具有較高的後設認知能力，就能有效的對學習進行監控、調節，能夠提高學習的效率。具有高後設認知能力的兒童較能組織訊息、檢查及修正錯誤、變通使用策略，而有較好的學業行為表現是在於強調數字的意義化的結果，這與許多研究結果不謀而合(陳儀芳 2011;黃唯娟 2008;楊德清,2002；劉逸書 2009)；我國的數學教育改革若想要更臻完備，數感教學應為國小數與計算主題之重點，也應貫穿整個國小數學課程。教師於教學中，應鼓勵學童探索不同的解題策略，使其靈活的運用數字，激發學習數學的興趣，以翻轉現有數學教與學的困境。

柒、結論與建議

一、結論

（一）國小六年級學童於數感能力各向度的表現不同:

1. 以平均數來說，理論向度三對瞭解運算對數字的意義及其影響的能力平均數是所有向度中最高，而向度一瞭解數字的意義和數字間關係的能力之平均數最低，顯示學童在瞭解運算對數字的意義及其影響的能力之向度表現上，相較於其他四個理論向度，表現相對佳。
2. 以答題正確率來看，以向度五瞭解數與運算多重表徵的能力得到相對較為優秀的平均表現，其最高與最低答對率超過半數，且差距最小，顯示樣本學童對於認知數字可以不同的型態來表達與呈現，並能以彈性的方式去做適當的組合或分解來運算，使運算更為簡便。
3. 整體數感能力的表現不佳，顯示本研究之六年級樣本的數感能力有待加強。

（二）國小六年級學童於數感上的錯誤類型統整為以下八項錯誤類型:

1. 整數概念迷思錯誤類型。
2. 分數的概念迷思錯誤類型。
3. 小數概念迷思錯誤類型。
4. 先備知識缺乏錯誤類型。
5. 刻板精算迷思類型。
6. 粗心錯誤類型。
7. 猜答案錯誤類型。
8. 推理表述能力薄弱錯誤類型。

（三）國小六年級學童於數感上的錯誤原因: 本研究分析所有樣本在「國小六年級學童數感能力分析」問卷測驗之數感上的錯誤與晤談資料，歸納為以下五大錯誤原因:

1. 數感概念迷思:包含數感概念錯誤與數感策略誤用。
2. 習慣列式精算學習。
3. 消極猜測。
4. 缺乏數學推理的能力。
5. 缺乏檢核錯誤的能力。

二、建議

（一）對教師教學的建議

數學的學習是循序漸進,每個學習階段都需奠基穩固，再繼續進行下個學習階段，這就是所謂的建構學習，而數感能力的培養正是如此，強調的是學童需親自參與去完成學習過程，非完全仰賴他人直接的告知。學童

在不受干擾下，自己去推斷、發現及下結論。因此，教師所要扮演的角色，除了觀察學童學習外，也須要在學童學習活動期間吸引他們去發現與探索，並用難題激發起其思考力。以下提供幾點建議，盼望對現場教師能有所助益：

1. 快速解題與精熟計算不該是教與學的重點：強迫學童直接採取最快速有效的解題方式，只會讓學童習得制式、快速而自動化的解題策略，卻沒有進行數學思考與概念理解；教師應該結合各種數字出現的情境，以進行概念反覆的釐清，而非將重點擺在計算的精熟，如此學童才能彈性運用數字，以培養出數感能力。
2. 教學應著重數字的意義化：有良好能力的數感學童能夠在真實情境中，流暢的使用數字或運算，並且能夠將數字在數學情境中與真實環境中轉換。教師於教學上應著重和真實生活情境結合的數感教學；教學時，佈題應貼近學童的生活情境，使學童能應用於生活中，學習時才會覺得數學是有意義且真實的，進而能享受學習的樂趣。
3. 激發學童有意識的學習：教師在教學中可融入後設認知的策略，教師為適時發問者，所有的概念建構、策略應用皆在同儕討論自行連結完成。多鼓勵學童嘗試、探索、或創造不同的解題策略，在課堂上營造出安全的討論氣氛，以合作學習、異質分組的方式由學童先在組間再到全班性的討論、對話以尋求出更快、更好的方式解題，激發出學童數感能力。
4. 評量工具的形式的調整：本研究中發現因現今數學評量工具偏重紙筆測驗，而當中的選擇題、計算題與應用題的內容與形式大多偏離情境，導致學童易倚賴記憶性的數學算則或片段性數學概念來解題，久而久之就養成機械、快速且自動化等消極性的解題策略與學習態度，在數學推理的能力發展上表現不佳；另外，教學後適時適量的晤談可以有效增進學童的學習成效，但因學童學習的個別差異大，在課室中教師無法無法全面深入探索每一位學童的想法，研究者在整理分析問卷與晤談資料發現問卷中的二階段選擇題形式，可以解決此困境，藉由第二階段的原因說明初步了解學童的解題思維，幫助教師於教學前、中、後去蒐集學童解題時的策略與內在思維之內涵等相關訊息，就能更有效率且適切的與學童進行教學的對話，掌握學童的內在學習起始點與迷思，進行有效教學。

捌、參考文獻

[1] 九章出版社編輯部（1995）。**錯誤辨析**。台北市：九章出版社。

[2] 石函早與胡俊山 (2007)。數學概念教學中的錯誤概念問題。**中國雲南保山師專學報**，**26**.2，46-49。

[3] 江曉霜（2010）。**國小六年級原住民學童數感能力分析之研究**。國立臺南大學數學教育系數學科教學碩士班碩士論文，未出版，臺南市。

[4] 李芳樂 (1993)。數學錯誤成因的探討。**香港中文大學初等教育學報**，4(1)，77-82。

[5] 冷月琴（2012）。**除法解題與錯誤類型之研究：以國小中年級為例**。國立屏東教育大學教育學系課程與教學碩士論文，未出版，屏東縣。

[6] 林清山、張景媛 (1994)。國中生代數應用題教學策略效果之評估。**國立台灣師範大學教育心理與輔導學系教育心理學報**，**27**，35-62。

[7] 林素微（2002）。**國小高年級學童數感特徵暨數感動態評量發展之探討**。國立台灣師範大學教育心理與輔導研究所博士論文，未出版，台北市。

[8] 徐俊仁 （2001）。**發展國小六年級學生數字常識能力之研究**。國立嘉義大學國民教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。

[9] 秦麗花 (1995)。國小數學學障兒童數學解題錯誤類型分析。**特殊教育季刊**，**55**，33-38。

[10] 郭正仁 (2001)。**高雄市國二生多項式四則運算錯誤類型之研究**。國立高雄師範大學數學系研究所碩士論文，未出版，高雄市。

[11] 教育部（2003）。**九年一貫課程綱要**。臺北市：教育部。

[12] 教育部（2018）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域教學實施要點**。臺北市：教育部。

[13] 梁淑坤 (1996)。研究與教學合一:以分析「一元二次方程式」的錯誤為一個例子。**嘉義師院學報**，**10**，456-472。

[14] 許清陽 (2006)。**國小學童數感理論模式建構與電腦化數感診斷測驗系統之研究**。國立高雄師範大學教育學系博士論文，未出版，高雄市。

[15] 陳儀芳（2011）。**以後設認知策略發展國小四年級學童數感能力之研究**。國立臺南大學應用數學系數學科教學碩士班碩士論文，未出版，臺南市。

[16] 鹿曉雯（2015）。**臺南濱海地區國小二年級新住民子女數感能力之探究**。國立臺南大學應用數學系數學科教學碩士班碩士論文，未出版，臺南市。

[17] 黃唯娟 (2008)。**提升國小六年級數常識之教學效益探討**。國立嘉義大學數學教育研究所碩士論文，未出版，嘉義市。

[18] 曾陳密桃（l990）。**國民中小學生的後設認知及其與閱讀理解之相關研究**。政治大學博士論文，未出版，台北市。

[19] 黃琮智（2008）。**國小六年級學童數感能力分析之研究**。國立臺南大學數學教育學習碩士論文，未出版，臺南市。

[20] 黃賢宗（2014）。**臺南濱海地區國小三年級新住民子女數感能力之探究**。國立臺南大學應用數學系數學科教學碩士班碩士論文，未出版，臺南市。

[21] 楊德清（1998）。筆算能力與數字常識表現之差異性的探討。**科學教育月刊**，**212**，3-10。

[22] 楊德清（2000）。數字常識與筆算能力。**教師之友**，**41**（2），12-18。

[23] 楊德清（2001）。國小六年級學生數字稠密性之認知的探討。**科學教育研究與發展季刊**，**23**，41-56。

[24] 楊德清（2002）。從教學活動中幫助國小六年級學生發展數字常識能力之研究。**科學教育學刊**，**10**（3），233-260。

[25] 趙睿音（譯）（2016）。Kathryn Schulz著。**犯錯的價值**(Being wrong：adventures in the margin of error)。台北市：大寫出版。

[26] 劉逸書（2009）。**以後設認知策略發展國小五年級學童數感能力**。國立臺南大學數學教育學系碩士班碩士論文，未出版。

[27] 謝宗育（2011）。**臺南濱海地區國小六年級新住民子女數感表現之研究**。國立臺南大學應用數學系數學科教學碩士班碩士論文，未出版，臺南市。

[28] Burns, M. (1994). Arithmetic: The last holdout. *Phi Delta Kappan*, 75(2), 471-477.

[29] Howden, H.（1989）. Teaching number sense. *Arithmetic Teachers*, *36*, 6-11.

[30] Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 16-32.

[31] Maurer, S. B.(1987). New knowledge about errors and new views about learners：What they mean to educators and more educators would like to know in A.H. Schoenfeld (Ed.),*Cognitive science and mathematics education* (pp.165-187). N .J.:LEA.

[32] Reys, R. E. & Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 225-237.

[33] Reys, R., Reys, B., McIntosh, A., Emanuelsson, G., Johansson, B., & Yang, D. C. (1999).Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, 99(2), 61-70.

[34] Schwarzenberger (1984)。錯誤的重要性。數學圈，**21**，73-80。

Biographies

Yu-Fang Wang received the M.S. from the Department of Applied Mathematics, National University of Tainan, Taiwan, in2019.
Now, she is an elementary school teacher teaching in Elementary School, Tainan, Taiwan. Her teaching interests are number sense of mathematics for elementary school students.

Chien-Chung Huang received the Ph.D. in Mathematics Education, University of Northern Colorado, USA.
Now, he is an Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, National University of Tainan, Taiwan. His research interests are Pre-service teacher professional development, mathematics education, mathematical analysis etc..