International Journal of Science and Engineering Vol.2, No3 (2012): 7-17

Special Issue

The Dynamic Visualized Computer Design for Learning the Limit Concept

Che-jen Hsieh[1,*] *and Ching-chih Li*[2]

[1]*National Tainan Institute of Nursing, Tainan Taiwan*
[2]*Ho-Sun Elementary School, Tainan, Taiwan*

Abstract — The purpose of this study is infusing the APOS theories with the GSP software to design the dynamic digit materials for students to learn the limit concept, and report the progressive of their understanding. We found in such dynamic APOS environment, the case of students can manipulate the object, visualize the process of change caused by the action therefore can understand the concepts of limit in a concrete way. The participants can connect the meaning between the symbolic and graphic representation. They can also generate the limit scheme and apply them to solve the application problems.

Index Terms—APOS, limit concept, GSP

*Corresponding author: *chejenhsieh@mail.ntin.edu.tw*

數學極限概念之動態表徵設計

謝哲仁
國立台南護理專科學校

李慶志
台南市立和順國小

摘要

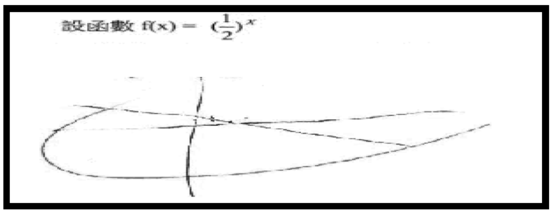
本研究主要目的是利用 GSP 軟體來融入 APOS 理論後，設計動態且可允許操作的電腦輔助教材並探究個案學生是否因而對函數的極限概念能理解之過程。研究發現，APOS 理論的電腦設計，讓學生可以操作視覺物件，建立正確的函數的極限概念，並且具備代數符號及圖形間的連結能力，藉由圖形學習極限概念及性質，讓學生覺得有意義，形成基模以後，個案學生可以解決極限的問題，更進一步瞭解微分的雛形。

關鍵字： APOS；極限；GSP 動態教學

壹、緒論

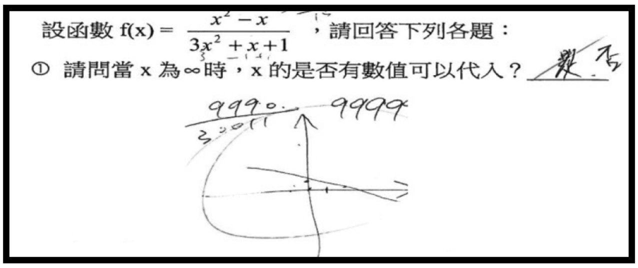
一、 研究動機與背景

極限$\lim_{x\to a} f(x) = L$的表示法含有動態的兩個階段，x 很趨近 a 時，f(x)的值會穩定下來。因為現有數學課程的呈現方式是靜態(figure)，非動態的(dynamic)，是符號(symbol)，非具操作性的(operative)，是單一表徵(representation)的陳述，使得很多學生在極限概念的學習，常是支離破碎的，因而無法與其他概念如連續、微分、積分等概念做連結。因為靜態教材不具彈性，所以概念在微小與極大之間不易呈現，是零碎不完整的，也因此學生在使用概念時，常常窘態畢出，例如在被要求描繪出 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的指數基本函數，學生仍停留在線性基模，常以圖一的方式做答：



圖一 學生對 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 圖形表徵有不完整的發展

學生在函數圖形知識，有發展不完整的情形，無法將 x 變數視為變動，無法運算比較特別的函數值 f(x)，在要求描繪 f(x) = $\frac{x^2 - x}{3x^2 + x + 1}$?這時學生回答如圖二所示。

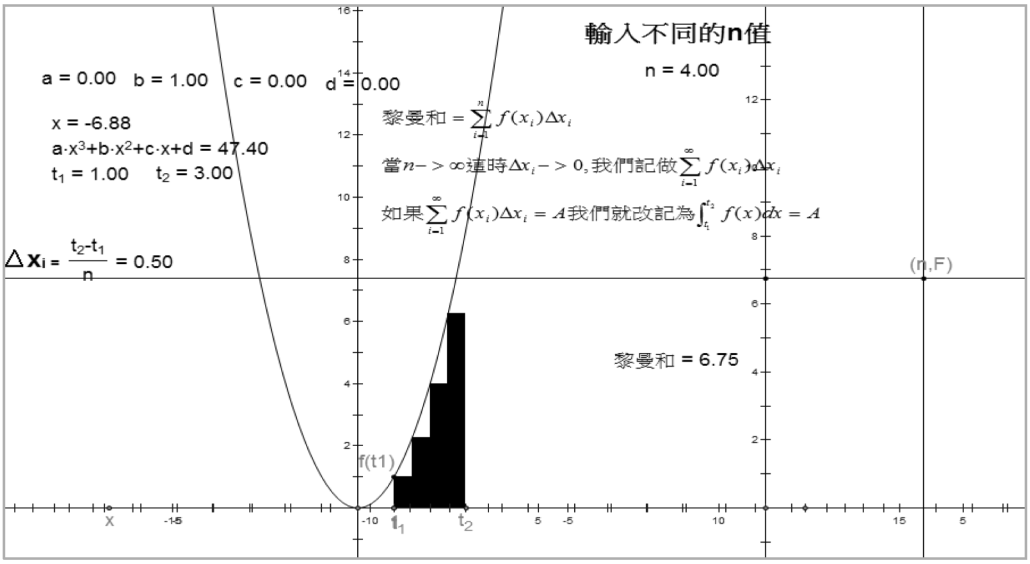


圖二 學生描繪 f(x) = $\frac{x^2 - x}{3x^2 + x + 1}$

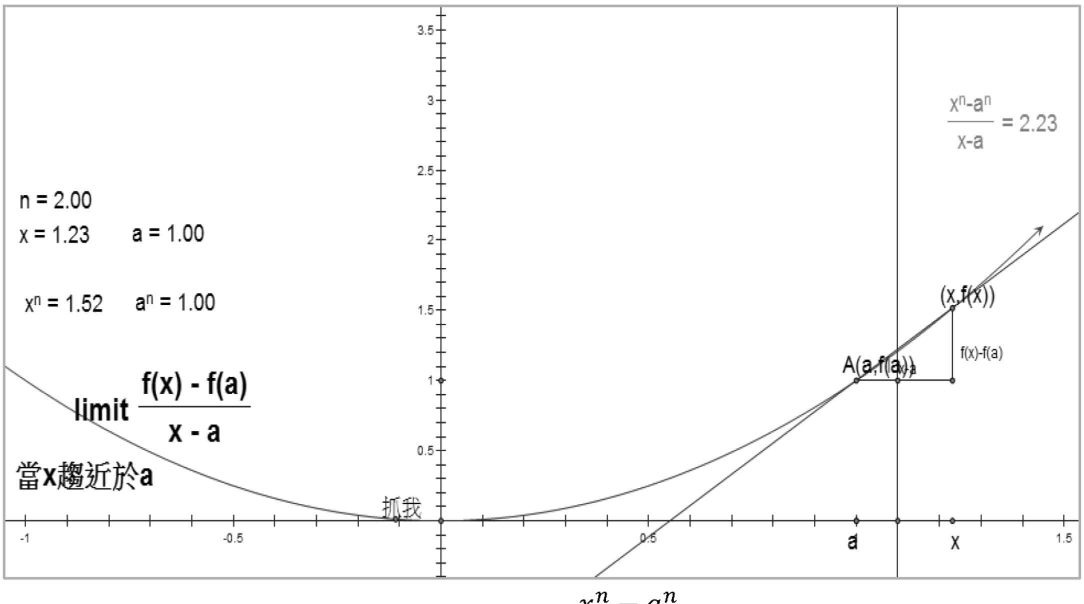
這樣的答案並不少見，有些，遇到函數可以用代數符號運算來求解，但在面對極限求值問題時，學生往往不知所云，例如，只將∞看成符號不是數值，我們認為這是過去的教材設計，沒有融入動態數值或圖形的諸多缺失，有以致之。

現代科技擁有龐大的計算功能，可以讓我們快速學習極限的內涵，例如 0.99^{100} = 0.99 * 0.99 * 0.99 *….* 0.99 ≈ 0.366032341　1.01^{100} ≈ 2.704813829 而 0.99^{500} ≈ 0.006570483 1.01^{500} ≈ 144.7727724 從這邊我們不難推論 0.99^n 會向 0 逼近，而 1.01^n 則會愈來愈大，所以不會接近一個固定數，當 n 很大時；前者我們可以，以打折的問題包裝，例如某件物品，每經過一次轉手就折價九成，經過 100 手，500 手以後，就幾乎沒有價值，但是，如果每經過一次轉手，可以獲取微薄利潤 1/100 那麼經由 500 手以後累積 144 倍多的價值。此外，重複上述計算的過程，我們不難歸納 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \; when \; |r| < 1$ ，甚且得到著名的超越數 e $= \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ e ≈ 2.71828 ...的事實。

很多極限的計算來自於解微積分問題的過程，例如求$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$是源自於$\int_0^1 x^2\,dx$的黎曼和，將區間[0,1] n 等份後，取右邊的端點 ，於是積分$\int_0^1 x^2\,dx$變成求曲線 y = x^2下的 n 個長方形面積和 $\frac{1}{n}*\left(\frac{1^2}{n^2}+\frac{2^2}{n^2}+\frac{3^2}{n^2}+\cdots+\frac{n^2}{n^2}\right)$ 當$n\to\infty$ 。再如 求 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}$ 的問題，可能來自於求函數 y = x^3 在 x = 2 的導數。如果學生能夠知道問題的來源情境，也就爲其問題找到意義的出處，而教學的設計就是希冀協助學生，視覺其所求的問題，如定積分是區域的曲線下面積，而黎曼和是將所夾區域 n 等份去求長方形面積和，曲線在某一數值 a 的函數導數等於是在找(a, f(a))的切線斜率值如圖三、圖四。

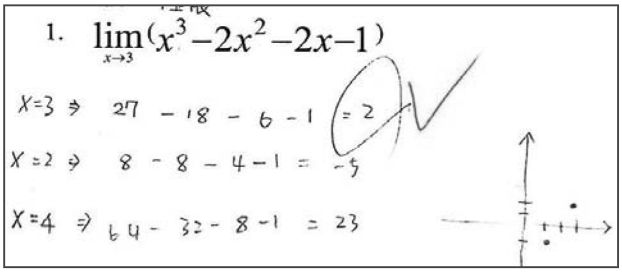


圖三 視覺$\int_0^1 x^2\,dx$的黎曼和(曲左邊端點)



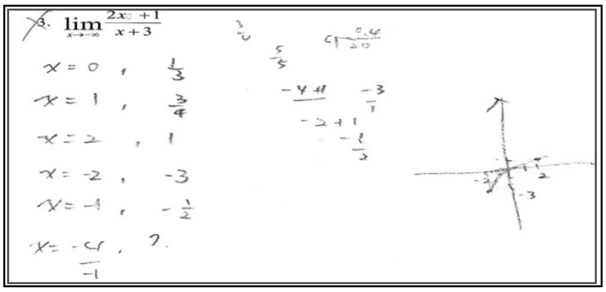
圖四 視覺 $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$

[1]就指出數學概念的意義是物件與其符號的關係，就如一個句子的意義不是只有句子的語法而已，還應包括其所指的發生事件的本身與其脈絡。因為教材是靜態，呈現的方式常是單一表徵，不具有可變的情境、或是可以互動(interaction)，使得學生，常只是表面性的認識概念。即使學生自以為理解某些概念，但是否仍能達到所謂的一般化，並能重新表徵或用來解釋新情境，還是一個大問題。概念意義的生成，對個體而言，有一重要的元素就是理解(understanding)；理解是納入自己的認知基模，當然有層次之分，Skemp 就把理解分成工具型的(instrumental)和因果式(relational)的理解。 如圖五所示，學生在求函數極限時，會利用代入數值求得許多解，但卻無法解釋符號與極限的意義。知道結果與解釋其源由，也知其然才是真正的理解。



圖五 學生在求函數極限時，求得許多解

指數與分式函數的不夠了解，往往影響到對極限的判定。其中一個重要的關鍵在於繪圖。指數與分式函數不好計算數值，尤其在特定點的求值表示，以至於影響到繪圖的準確性；因此應用指數與分式函數圖形概念，在判斷發散與收斂時，常會失準。學生在-3 處繪圖出現問題，無法往-∞方向完成圖形，如圖六所示。



圖六 學生無法繪製 x=-3..-n 負向的函數圖形

技職體系的學生常由較具體、直觀的方法進行學習[2]。正好電腦以動態圖像的方式呈現數學概念的性質及其變化的過程，提供學習者更強而有力的學習與知覺經驗，讓學習者形成動態的內在表徵。所以教師可以善用科技，為學生建構一個具有主動認知的環境，搭起學習的鷹架[2]，好的電腦數學軟體應是很好的概念學習的意義製造和連結器具。[3]就建議將電腦當作教具，做為教師與學生之間的媒介，以彌補教科書無法以外在動態表徵的方式，來詮釋抽象概念的缺陷。電腦能動態的呈現圖形、代數及數值的表徵，因此用來學習函數將是一個很豐富的數學環境[4]。但是如何有效的運用仍困擾著大多數的數學教師；例如早期函數的圖形描繪(graph-plotting)軟體只接受以公式的方式輸入，學習者就容易誤以為公式形態才是函數。雖然目前科技大部份被用來將標準數學課程的呈現圖形化，然而也有一些研究者[5]呼籲應著重在培養學生新的代數思考(algebraic thinking)及用來研究實體世界和數學現象中的次序原型(patterns)和關係(relationships)

貳、研究目的

本研究的電腦教材以圖形為主融入 APOS 之理論，設計出視覺化的動態電腦輔助教材，讓學生透由此教材學習後，建立正確的指數函數和分式函數的極限基本概念，並且具備代數符號及圖形間的連結能力，藉由圖形學習極限概念及性質。

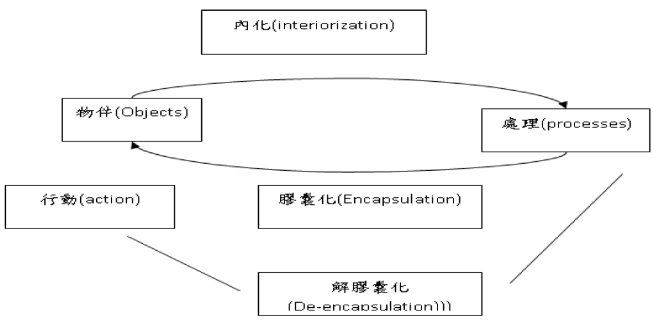
一、文獻探討

數學概念的起源分解(genetic decomposition for a mathematical concept)是研究者[6]用以解構高階概念的模型，這裡涉及幾個基本元素概念，必須加以定義並舉例說明；前函數(prefunction)，一種涉及沒有或甚少函數概念的回答，例如一個方程式，出現 x 但沒有兩個 y 的方程式;行動(action)對於物件的移轉(transformation)，通常被個體視為有一外在的引發，如將一數值代入變數並計算得一數值，這時視$(x+1)^2$ 為一種指令去執行計算，因此所得是一數值，此時個體尚無法接受符號表示式 $(x+1)^2$ 是一答案。處置(process)是個體建立在對物件的重覆行動上的反思，最後可以抽象此行動的意義，形成一自我反應的自動化處理程序，不必受外在刺激的影響，因

此可將一輸入密切地移轉成輸出關係的一般化。當個體對一數學表示式建立自求數值(self-evaluating)的心像，這時我們說此個體具有處置的概念。具有處置概念個體可以逆推或解構其正向行動，且不需要實際去執行計算，才會知道最後的結果，因此不像行動那樣，並且可以接受式子如$(x+1)^2$也是一種計算的結果，此時，如果有需要，個體可以想像此代數式，代入一連串的連續數字，讓這個式子快速的逐一計算它。物件(object)則是個體對一種獲多種處置的反思，且將整個處置變成一種自動化之程序加以封包成一實體，之後可以用來移轉或行動或與其他物件運算。例如我們將一等比的幾何成長現象化成代數表徵 2^m 另一物件是 2^n ，利用指數律 $a^m/a^n=a^{m-n}$ 可得 $2^0 = 1$ (取 $m = n$);基模(scheme)由一或數個物件及其處置所集聚的概念構造圖，也可視爲個體保留核心概念及其關係的一種集聚知識，這種知識使得使用者知曉何時及如何使用這些概念。基模一旦被建構，物件和處置是被關聯的，且有順序先後的排序。基模知識可以讓資訊被接受或存取使用。當使用者取得數學概念，原理和程序時，就可將其轉換成基模，提供做爲下次數學活動如探測或分類等之知識基底。

[6]就是利用電腦程式的觀點，以函數爲例，提出 APOS 的認識論模式。比起 Piaget 的生物模式，這個模式較能銓釋高階的反思抽象(reflective abstraction)的心智活動。

整個情形我們以圖七表示



圖七 建構數學知識[6]

[7]利用 **APOS** 的理論提出極限的六個階段的設計；

1)行動: 連續計算 f 的函數值，當 x 愈來愈靠近 a

2)內化: 將上述的行動內化成兩個步驟的處置，”x->a”,and “f(x)->L”

3) 封包 (b) 並探測一些極限的性質。

4) 重新建構步驟二的處置，並以正式的符號表示；如極限是 $0<|x-a|<\delta$ 而且 $|f(x)-L|<\varepsilon$

5) 將上述的符號數量化。

6) 利用ε-δ 基模概念到特別情境。

這個設計，著重在極限的定義，對技職校院函數不太穩固的學生，較不適宜，因此，我們發展另一個以視覺、直觀、互動爲主的 APOS 電腦設計。

參、研究工具

一、研究設計

本研究屬個案研究法（case study）。根據研究目的選取三位有意願的護理專科五年級生來參與教學實驗，並進行晤談分析。三位學生函數圖形的基礎概念非常薄弱，對函數圖形無法正確呈現，偏重於函數公式的運算，卻無法解釋其結果如何產生，因此當面臨極限的求值問題，常不知所措，無法清楚分辨問題的所在。因此，我們的電腦設計，從動態函數圖形進行操作學習。希望透過 **GSP** 融入 **APOS** 理論的動態電腦輔助教材，進行實驗教學，能有助於學習函數與極限概念，並探討學生在學習的過程中，不同表徵間的轉換及連結情形，經由融入 **APOS** 動態電腦輔助教學設計教學後，學生概念層次的改變。

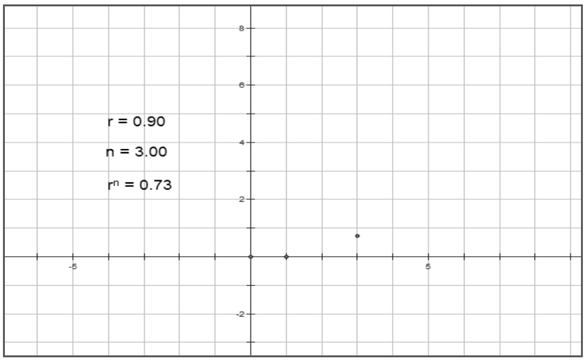
實驗是利用 100 年 7 月進行,共進行四次，每次爲時三個小時，每次實驗教學結束時做形成性的紙筆及口語評量。其進展我們 **APOS** 四個層次來說明。

二、融入 APOS 之指對數的電腦設計

本研究中所設計的動態電腦輔助教材，根據A(Action)、P(process)、O(Object)和 S(Scheme)的層次分別對極限做分析說明如下。

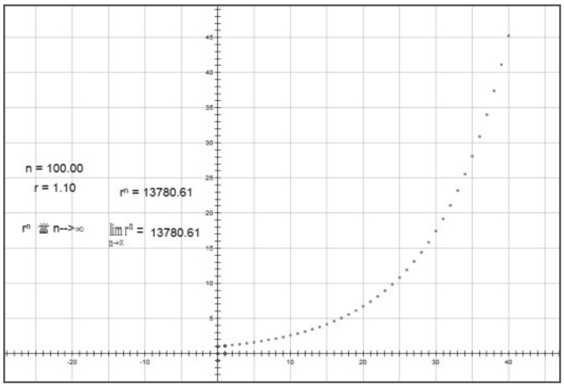
1) 指數函數極限的設計

- 『Action』：指數函數 r^n 的行動描點輸入 r 與 n 值電腦會主動計算 r^n 值並描點出 (n , r^n) 。



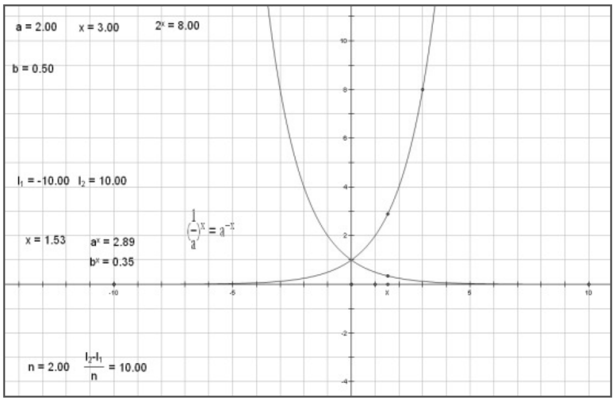
圖八 指數函數極限行動(action)的電腦設計

- 『Process』：指數函數 a^x 的處置描點輸入 a，與 n 值 電腦會在其指定的區間範圍內，自動計算 a^x 值並描出 n 個 (x , a^x)的點。



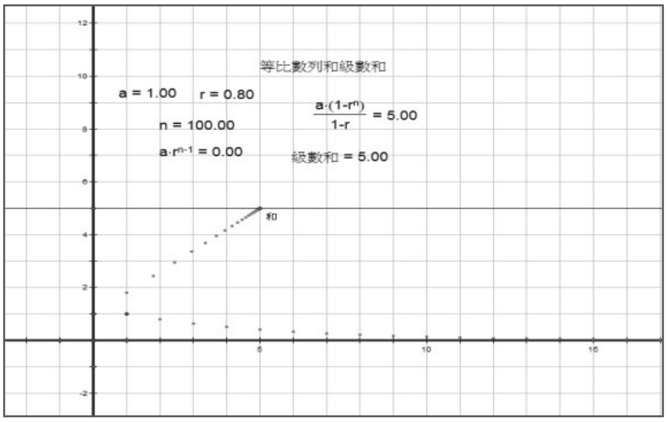
圖九 指數函數極限處置(process)的電腦設計

- 『Object』：指數函數 a^x 的物件描點輸入不同 a 值 電腦會在其指定的區間範圍內，自動計算 a^x 值並描出 y = a^x 的圖形，不同的 a 就有不同的圖形物件，我們可以研究出其遞增、減之性質，也可以研究當 x 趨盡+∞和-∞時，a 值將會影響 y 是否收斂的因素。



圖十 指數函數極限物件(object)的電腦設計

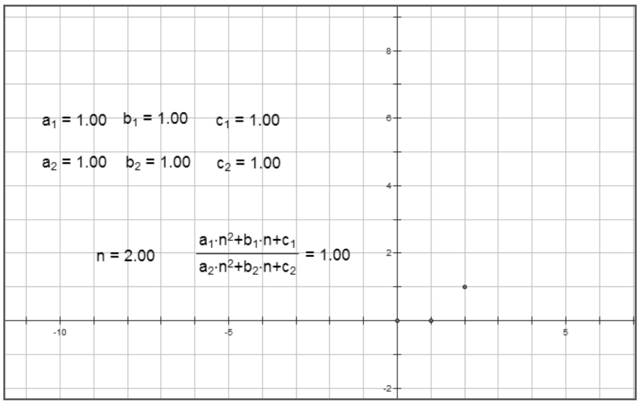
- 『Scheme』：指數函數極限基模之設計，利用指數極限的觀點，得到當 x 為某特定值時，指數函數會收斂，級數和也會收斂的關係，更加鞏固對指數極限基模。



圖十一 指數函數極限基模(scheme)的電腦設計

2) 分式函數極限電腦設計

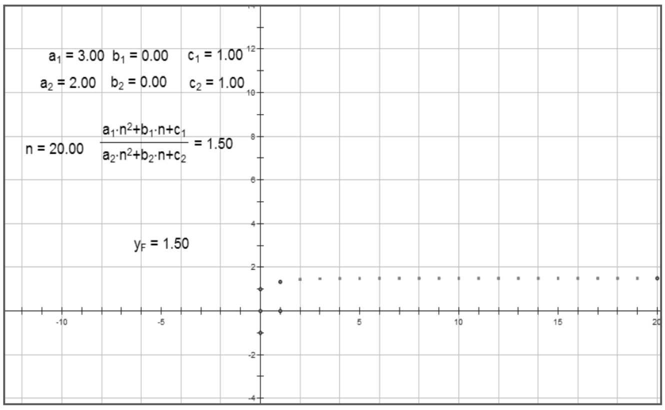
- 『Action』：利用 a、b、c 的數值控制，來調整成我們所需的分式函數 y=$\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$，在行動描點輸入 n 值 電腦會主動計算$\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$並描點出(n , $\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$)。



圖十二 分式函數極限行動(action)的電腦設計

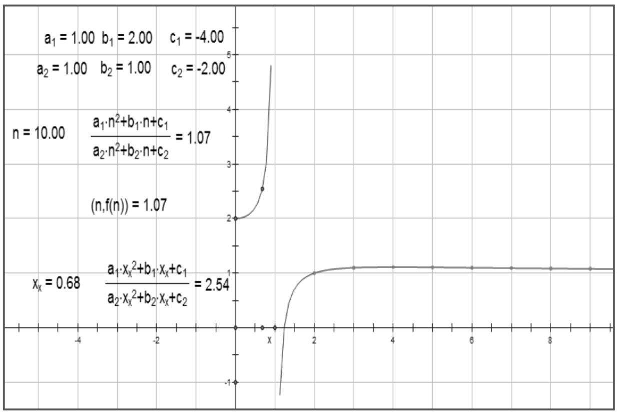
- 『Process』：調整所需的分式函數 y=$\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$後，處置描點輸入不同 n 值電腦會在其指定的區間範

圍內，自動計算 $\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$ 值並描出 n 個 (x，$\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$)的點。



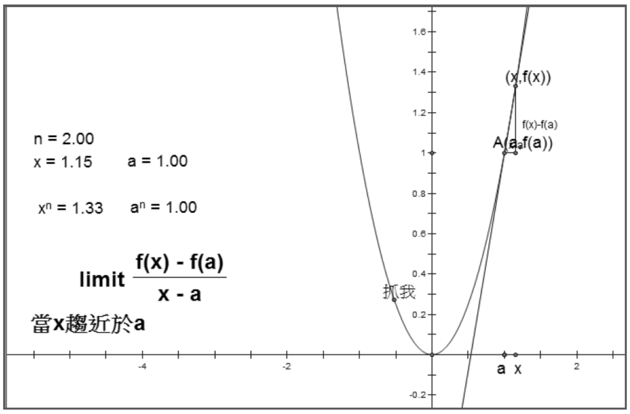
圖十三 分式函數極限處置(process)的電腦設計

- 『Object』：分式函數 y=$\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$ 的物件描點輸入不同 n 值電腦會在其指定的區間範圍內，自動計算 $\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$ 值並描出 y=$\frac{a_1 \cdot n^2+b_1 \cdot n+c_1}{a_2 \cdot n^2+b_2 \cdot n+c_2}$ 的圖形，不同的分式就有不同的圖形物件，我們也可以研究出在各位值的收歛與發散之性質。



圖十四 分式函數極限物件(object)的電腦設計

- 『Scheme』：分式函數的特例-多項式函數基模之設計，延伸到微積分導數與積分的概念，得出微分與積分與多項式函數極限的關係，最後更鞏固極限基模，與未來微積分的概念學習。



圖十五 微分基模(scheme)的電腦設計

三、資料的蒐集與處理

本研究所蒐集的資料包括極限 Action 前後測、Process 前後測、Object 前後測及 Scheme 前後測。本研究所蒐集之訪談資料爲個案學生的個別訪談，針對個案學生操作歷程或是需要進一步探討的部分，加以深入個別訪談，以了解真實情況。於訪談過程中爲蒐集資料的完整性，研究者將訪談與教學實驗過程全程以錄音筆錄音及攝影機錄影下來，並轉爲原案，作爲本研究資料的三角交叉校對。

肆、研究成果

本研究的主要目的是應用「融入 APOS 理論於動態電腦設計教材」，以「圖形設計」爲主，探究個案學生在學習極限的過程中，對於不同表徵之間的轉換及連結情形，以及此教學實驗過程中個案學生學習的概念層次之發展。針對研究目的，分析解釋所蒐集的資料，在本節中，S 代表個案學生，R 代表研究者。

一、個案函數成就測驗前測和後測結果訪談分析及詮釋

個案學生動態電腦教材學習對數後，其學習單的答題分析如表一，爲學生在前後測所答對的比率。

表一　學生指數函數學習單分析表

	Action		Process		Object		Scheme	
	前測	後測	前測	後測	前測	後測	前測	後測
1	100%	100%	55%	100%	33%	33%	0%	100%
2	66%	89%	55%	100%	0%	100%	50%	50%
3	67%	100%	66%	100%	0%	33%	44%	100%
4	50%	100%	33%	100%	0%	100%	17%	92%
5	89%	100%	77%	100%	11%	100%	27%	100%
結果	74%	98%	57%	100%	9%	73%	28%	89%

1)極限 Action 層次基本概念分析，如圖十六

圖十六 概念分析

(後測)

R:好，那看到第二題，x 能不能等於 2?

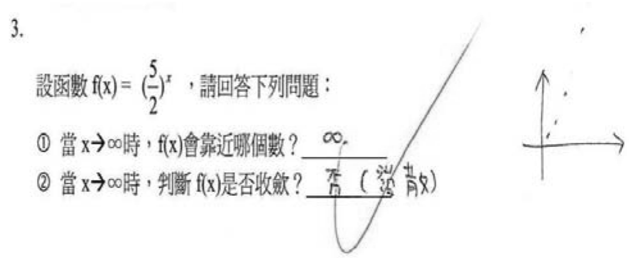
S_3:x=2 就沒有存在意義。

R:那麼，點應該要怎麼呈現，我的意思是當 $x=2$ 時，會不會有那個對應點存在?

S_3:沒有。

分析：學生在前測時對於提供特殊的 X 點時，無法正確回答，在後測時不論是在圖形上或訪談中，都可以清楚瞭解在特殊的 X 點的意義與是否存在。

2)極限 Process 層次基本概念，如圖十七



圖十七 層次基本概念

R:接著看到第三題，它會不會靠近哪個數?

S_3:不會。

R:因爲最後的數會……

S_3:無限大。

分析：學生前測時無法正確繪製指數函數圖形，因此對於是否收斂只能以猜測的方式回應，在後測中除了可以正確繪製函數圖形外，對於在∞是否收斂也有一定的瞭解。

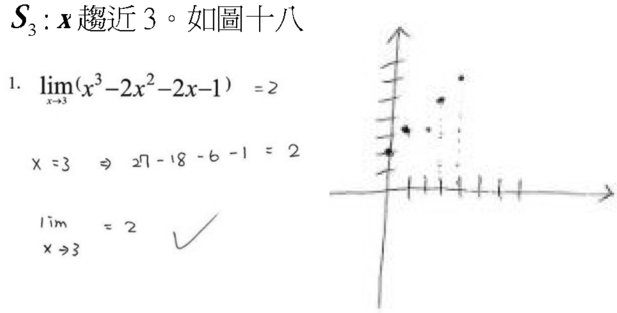
3) 極限 Object 層次基本概念分析

R:那 $\lim$ 是什麼意思呢?

S_3:極限。

R:那 $x \to 3$ 呢?

S_3: x 趨近 3。如圖十八



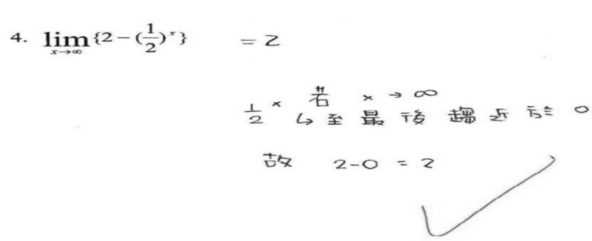
圖十八 極限計算過程

R:什麼是趨近?

S_3:由左或右接近 3，但不等於 3。

R:沒錯，由左或由右接近 3 但不等於 3，那麼你畫的出相對應的圖形嗎?

S_2:可以，畫的出來。如圖十九



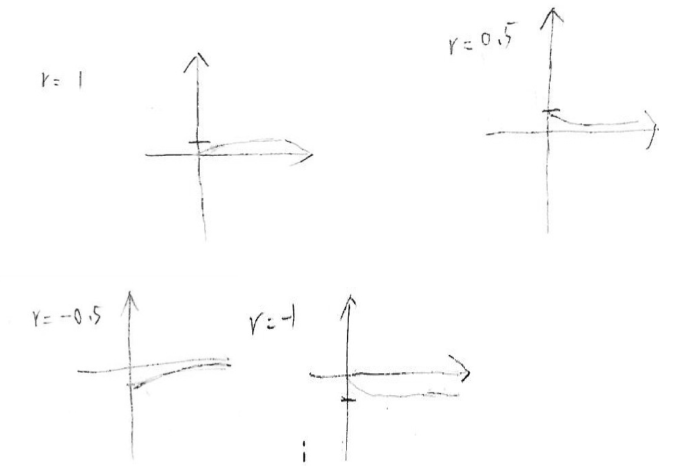
圖十九 計算推論

R:嗯，沒錯，那麼你們還記得之前有提過，當lim 的 r 分之 n 次方時，r 是多少的時候會存在……是 1～-1 之間，還記得圖形嗎?，那麼請你們畫出 r=1、r〉1、r〈1 的圖形。

S_1: r〈1?

R: r 在-1 和 1 之間，r 的 n 次方。

S_3:反正就是畫 1，0.5，-0.5，-1。如圖二十



圖二十　學生計算所得之圖形

分析：學生在前測時，對於極限的符號與意義都不瞭解，在後測中除了瞭解 lim 是求極限的符號，對於趨近也有新的定義，是從 x 的左右端點慢慢逼近，最後又不等於 X。而對於指數函數是否收斂與發散，也有明確的 a 數值可以判斷，對於極限收斂與發散的性質更爲穩固。

4)極限 Scheme 層次基本概念分析

(後測)

R:第二題，循環小數表成最簡分數(有理數)：(1)$0.\overline{9}$ 應該要怎麼計算呢?

S_3:代入剛剛那個公式(等比級數)，就是 1 減掉公比，公比是 $\frac{1}{10}$ 。

R: 如果不是用公式計算，而是用極限的想法，應該怎麼計算?

S_2:就是 0.9999999999……，答案是趨近於 1。

R:所以用極限的想法，答案會是趨近於 1 嗎？

S_3:對。

R:那麼，換成用級數和的算法，就要變成 $0.9+0.09+0.009\cdots\cdots$

S_2: $0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009\cdots\cdots$

R:也可以用 S_2 的方法……

$$\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

S_2:就是 $1-(\frac{1}{10})^n$ 。

R:有關球落下的方式，可以請你們先把軌跡圖畫下來嗎?看到 S_1 所畫的軌跡圖，你們知道爲什麼要乘以 2 嗎？

S_2:因爲來回的高度都要算入。

R:那麼，爲什麼只計算一次 100m?

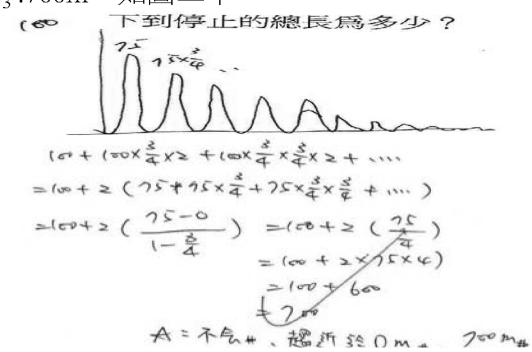
S_2:因爲球一開始是落下，沒有來回。

R:那你們怎麼知道公比是多少?

S_3:因爲題目就有告知，球回彈是落下高度的 $\frac{3}{4}$ ，所以公比是 $\frac{3}{4}$ 。

R:那麼，答案是……

S_3:700m。如圖二十一



圖二十一 總長計算結果

分析：在前測對於等比級數的求解，因爲面臨等比公式而不知所措，只知與極限求值有關，有推

估數字卻無法正確解出答案。在後測中已經等比公式的應用，對於如循環小數與落球問題都能利用極限的概念與圖形迎刃而解，也能從極限的概念延伸到微分導數與一次多項式積分求解的初步階段。

伍、結論

本研究所設計的動態電腦輔助教材，個案學生根據 A(Action)、P(process)、O(Object)和 S(Scheme)的層次分別對極限概念所得到的結論製成作表二。

表二 學生學習 APOS 於電腦動態教材之說明表

個案學生概念層次	個案學生數學概念
Action	1.後測答對率為 98%。 2.學生對於 x 值代入於指數與多項式函數，在圖形所對應的點已有明確的繪製，而對於特殊點 x 值代入無意義，也可以在圖形正確表示，也可以說明其意義。
Process	1.後測答對率為 100% 2.學生能瞭解沿續 x 值多點代入，對於指數函數延伸到+∞和-∞的推測到最後的數值，在多項式函數能從圖形上觀察到其在特定的變化，判定收斂或發散。
Object	1.後測答對率為 73% 2.新符號的進入，使學生在使用較不熟練，但對於其極限符號意義的解釋清楚表達，對於趨近也有新的定義。
Scheme	1.後測答對率為 89% 2.將極限的概念融入級數的求值、生活落球的問題、微分導數與一次多項式積分，學生能清楚應用極限於這些問題，除了可以解釋如何應用之外，更能正確表示其圖形的意義。

個案學生在教學實驗前，視代數符號及圖形為別物件，無法將其二者的關係做正確的連結，對於特定點極限是無意義的表示，教學實驗後，個案學生會以圖形來解釋極限的意義，對於+∞和-∞是否收斂或發散更有明確的判別方式，以觀察圖形的遞增和遞減為別原則。遇到問題時，個案學生會運用適用圖形表徵進行解題求得極值，發生困難或錯誤時，也會輔以代數符號來檢驗。

陸、參考文獻

[1] H. Steinbring," Routine and meaning in the mathematics Classroom." *For the Learning of Mathematics* **9**(1), pp.24-33,1989.

[2] C.J. Hsieh. The theories and design for dynamic geometric instruction *NCYU: The issues of innovation in mathematics education for elementary and junior students*, Taiwan: Fu-wen,2002, pp.225-244. (in Chinese).

[3] A. H. Schoenfeld, "Explorations of students' mathematical beliefs and behavior". *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355. 1989.

[4] C. Kieran, "Functions, graphing, and technology: Integrating research on learning and instruction". In T. A. Romberg, E. Fennema, & T. P. Carpenter(Eds.), *Integrating research on the graphical representation on functions*(pp.189-237). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates,1993.

[5] Zbiek, R. M.. "Prospective secondary school mathematics teachers' strategies for developing and validating functions as mathematical models in the presence of computing tools." *Journal for Research in Mathematics Education, 29*,184-201,1998.

[6] Aslala,Brown, Devries, Ed Dubinsky, Mathews and Thomas," A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics. In Kaput, J. Schoenfeld, Dubinsky (Eds.)" *CBMS issues in mathematics education,* 6, pp. 1-31. Washington, D.C.: American mathematical society,1996.

[7] Cottrill,J.,Dubinsky, E., Nichols, D.,Schwingendorf, K., & Vidakovic,D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process

scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167-192, 1996

作者簡介

謝哲仁（1960-），男，臺灣，職稱：副教授，博士，專長：科技融入數學教育，動態數學教育 指導研究生論文超過 30 人,擔任臺灣國科會相關研究計畫主持人超過十件 並已發表過上百篇的專業學術文章 最高學歷：喬治亞大學數學教育哲學博士 主要經歷爲 擔任美和科技大學圖書館館長 教務長 副校長 現任:國立台南護理專科學校學術副校長

李慶志（1979-），男，臺灣，職稱：講師，碩士，專長：科技融入數學教育，動態數學教育　台南教育大學數學教育碩士 已發表近十篇之專業學術論文 現任：台南市和順小學教師