

A Study on the Error Patterns of Sixth-Grade Elementary School Students in the Unit of Ratio and Proportion

Pei-Yun Chen^{1,*} and Chien-Chung Huang^{2,*}

^{1,2} Department of Applied Mathematics, National University of Tainan, Tainan, 70005, Taiwan

^{1*}E-mail : sandy990207@gmail.com

^{2*}Email : hcc001@mail.nutn.edu.tw

Abstract

The purpose of this study was to explore the problem-solving performance of sixth-grade elementary school students in the unit of ratio and proportion, explored the error patterns that students often made in this unit. This study adopted paper-and-pencil tests to collect quantitative data. The sample consisted of 237 students from thirteen classes of eight elementary schools in Tainan City. The students were tested by the researcher's self-edited "Ratio and Proportion Achievement Test." Subsequently, organized the error patterns made by students in the ratio and proportion unit, and found out the possible reasons of the error patterns. The research results are as follows:

1.The performance of sixth-grade elementary school students in the ratio and proportion unit from the entirety and different dimensions was different. All of the students had the highest grade in the equivalent ratio dimension, and had the lowest grade in the application of the ratio dimension.

2..There were seventeen error patterns that commonly made by sixth-grade elementary school students in the unit of ratio and proportion:

Misunderstanding the question, misplacing antecedent or consequent of the ratio, unclear concept of antecedent and consequent of the ratio, unclear concept of proportion, confusing concept of ratio with concept of proportion, unclear concept of equivalent ratio, unclear concept of irreducible ratio, not converting ratios into the lowest term by insufficient knowledge of irreducible ratio, solving the problem by using one or multiple steps, ignoring the meaning of the question, the wrong or incomplete of the equation, the incorrect formula of calculation, transferring the unit incorrectly, the incorrect unit, not calculating process, not writing the answer of the application questions, and the incorrect calculation.

6.There were eight possible reasons for the error patterns made by sixth-grade elementary school students in the unit of ratio and ratio:

Unclear concept of the whole quantity or part quantity, confusing concept of ratio with concept of proportion, misunderstanding the question, unclear the calculation rules of the ratio, unclear concept of ratio, insufficient knowledge of reading comprehension, insufficient of basic arithmetic ability, and writing carelessly.

Keywords: sixth-grade elementary school students, ratio and proportion, error patterns

* Corresponding author: sandy990207@gmail.com;
hcc001@mail.nutn.edu.tw

國小六年級學童在比與比值單元錯誤類型之研究

陳佩紘, 黃建中

國立臺南大學應用數學系

摘要

本研究旨在探討國小六年級學生在比與比值單元中的解題表現，並深入研究學生在該單元中常見的錯誤類型。研究採用紙筆測驗收集量化資料，對臺南市 8 所小學 13 個班級的 237 名學童進行施測，利用研究者自編的「比與比值成就測驗」。接著，對學生在比與比值單元中的錯誤類型進行分析，並探討可能形成這些錯誤的原因。研究結果如下：

- 一、國小六年級學童在比與比值單元的整體表現以及各向度表現各有不同，其中在相等的比向度表現最佳，而在比的應用向度表現最差。
- 二、國小六年級學生在比與比值單元常見的錯誤類型分為十七種，包括誤解題意、錯置前後項、前後項概念不清、比值概念不清、比與比值概念混淆、相等的比概念不清、最簡整數比概念不清、最簡單整數比認知不足未化至最簡、以一(多)步驟的方式解題、忽略題意資訊、列式錯誤或未完整、計算式錯誤、單位換算錯誤、單位錯誤、無計算過程、應用問題未寫出答案、計算錯誤。
- 三、國小六年級學生在比與比值單元出現的錯誤類型可能形成的原因包括整體量或分量的概念不清、比與比值概念混淆、誤解題意、比的相關算則不清、比的概念不清、閱讀理解題目能力不足、基本運算能力不足、書寫粗心等八種原因。

關鍵字：國小六年級學童、比與比值、錯誤類型

壹、緒論

比與比值是數學中一個極為重要的概念，它們在解決問題、分析數據以及日常生活中都有廣泛的應用，例如購物時比較價格、食材的比例調配、時間與速度的關係等。這些概念的理解和運用不僅對學生的數學學習具有深遠影響，還在實際生活中提供了寶貴的工具。理解和應用比與比值的概念是數學和科學學習中不可或缺的一環。這些基礎概念在處理各種問題和情境時都扮演著關鍵的角色。缺乏對比和比值的理解可能導致在數學和科學領域的學習中遇到困難，同時也可能在應用這些知識解決實際問題時造成挑戰。(Lamon,1994 ; Lesh et al.,1988)。

國小六年級的比與比值是數學課程中一個相當重要的單元，具有深遠的學習價值。這個單元培養學生對於數量之間的關係、比較和分析的能力，有助於他們發展數學思維和解決問題的技能。在探討比例結構之前，學生應確保已建立對乘法結構、倍數關係和等值觀念的充分理解，並能夠在實際的日常生活情境中應用這些概念。同時，他們還需培養具備推論、預測和判斷的能力，這有助於在解決各種問題和情境時更具靈活性和準確性(劉秋木，2002)。由上述得知，在數學學習中，比與比值扮演著極為重要的角色。透過循序漸進的數學概念結構，從國小數學教育開始培養學生對比例概念的理解。這奠定了他們在數學學習中更深層次發展的基礎。

探討學生數學學習成就的差異時，特別需要關注他們在解題上的表現。方文邦、劉曼麗(2013)當學生難以掌握數學概念時，容易產生迷思概念或錯誤類型，並且嘗試透過死記硬背或口訣的方式解決問題，這可能導致學生在數學學習中遇到挫折。因此，改善學生的數學學習成就，可以著重於瞭解學生在解題時可能存在的迷思和錯誤類型，並有針對性地解決學生所面臨的困難。

貳、文獻探討

一、比與比值

(一) 比與比值的意義

比用來描述一個量和另一個量之間的相對關係，在日常生活中被廣泛應用。例如：可以透過比例來表達全校男生和女生的人數之間的關係(Ohlsson, 1988)。劉秋木

(2002) 提出比(**ratio**)表示兩個量之間的比較關係。例如：六年甲班有 14 位男生、15 位女生，則六年甲班的男生女生的比是 14 : 15，其比值寫成 $\frac{14}{15}$ 。綜合以上所述，比與比值的概念在於揭示兩個量之間的相對關係。透過比或比值的數學表示，我們可以清楚地了解這兩個量之間的大小或比較。

(二) 比與比值的教材地位

依據九年一貫數學課程綱要，比與比值單元的能力指標及分年細目如下表 1。

表 1

比與比值單元之能力指標及分年細目

能力指標	分年細目
N-3-15 能認識比、比值與正比的意義，並解決生活中的問題。	6-n-09 能認識比和比值，並解決生活中的問題。 6-n-10 能理解正比的意義，並解決生活中的問題。
N-4-03 能理解比例關係、連比、正比、反比的意義，並解決生活中的問題。	7-n-13 能理解比、比例式、正比、反比的意義，並能解決生活中有關比例的問題。
N-4-04 能熟練比例式的基本運算。	7-n-14 能熟練比例式的基本運算。
N-4-03 能理解比例關係、連比、正比、反比的意義，並解決生活中的問題。	7-n-15 能理解連比、連比例式的意義，並能解決生活中有關連比例的問題。
N-4-04 能熟練比例式的基本運算。	

九年一貫課程綱要中強調比的概念是數量之間微妙的關係，尤其在國小階段，學童更容易透過日常生活情境思考兩者之間的相對情況，進而將比的觀念轉化為比值的形式。隨著學習的深入，國中階段擴展了比的意義，涵蓋了倍數關係和比值相等的概念，並總結為「外項相乘等於內項相乘」的比的算則。

二、錯誤類型

呂溪木在 1983 年提出，學生在學習中產生錯誤概念的原因可能來自於他們在日常生活經驗中自我學習的結果，也可能是因為他們未能理解老師的機械式教學（引自郭正仁，2001）。根據 Ashlock（2005）的觀點，錯誤在學習過程中可能產生正面的影響，因為在許多文化中，錯誤被視為反思和學習的機會。然而，教師應更加重視並深入了解學生在學習中所產生的錯誤類型，並使用有效的策略來協助學生建構正確的數學概念。張景媛（1994）指出，在過去的教學相關研究中，教師常常將學生的錯誤歸因於對問題的誤解。然而，現今的教學心理學研究指出，在學生的學習過程中，他們不僅會主動建構學習的材料，同時也會伴隨著錯誤的概念（misconception）。因此，教育者應該注重學生經常出現的錯誤類型，並針對這些錯誤型態來幫助學生釐清問題中

正確的數學概念。

參、 研究方法

一、 研究設計

本研究旨在分析整理國小六年級學童在比與比值單元中所出現的錯誤類型。研究者使用自行編製的比與比值成就測驗，透過紙筆測驗方式蒐集量化資料，並根據測驗結果對六年級學童在比與比值單元的解題表現進行分析。

二、研究對象

本研究以臺南市永康區的一個六年級班級，包含 27 位學童，進行預試研究。因考慮到人力和時間等限制因素，研究者採用叢集抽樣法，在臺南市地區隨機選取了八所國小，總計 237 名學童成為正式施測樣本。使用研究者自行編製的比與比值成就測驗進行資料的蒐集與分析。

三、研究工具

(一) 比與比值成就試題編製

研究者依據九年一貫課程綱要中的數學課程領域和 110 年七月公告的學習扶助基本學習內容，及參考 111 學年度第十一冊各版本國小數學教科書、教師手冊以及相關文獻，編製了比與比值成就測驗。本測驗共有 24 題，分為五個向度，包括比、比值、相等的比、最簡單整數比及比的應用，評分準則為每題 1 分，解題過程和答案完全正確的情況下便得 1 分；若解題過程有誤、答案有誤或空白，則該題得分為 0 分。

(二) 試題效度與信度分析

為確保問卷試題能更準確地反映所欲測量的目標，研究者在進行預試前對自編的比與比值成就測驗進行效度分析。接著利用 SPSS 21.0 進行預試結果的信度分析，以評估測驗結果的一致性水平。在信度分析中，以 Cronbach 所提出的 α 係數值來評估內部一致性， α 係數值越高，表示測驗結果越一致（涂金堂，2009）。Carmines 與 Zeller 在 1979 年表示通常來說，一份良好的教育測驗應具有至少 .80 的 α 值，以確保具有良好的信度和可靠性（引自余民寧，2022）。在本研究中，預試樣本經 Cronbach's α 內部一致性信度分析後， α 值為 .93，顯示該問卷在內部一致性方面表現出相當高的水準。研究者整理此測驗之各向度的 α 值詳見下表 2。

表 2

「比與比值成就測驗」各向度 α 值

題目向度	題號	α 值
比的意義	5、12、17	.75
比值的意義	1、8、13、18	.82
相等的比	2、6、9、14、19	.73

最簡單整數比	3、7、10、15、20、21	.80
比的應用	4、11、16、22、23、24	.81
總信度		.93

(三) 難度與鑑別度分析

比與比值成就測驗試題完成編排和預試後，研究者使用 Excel 軟體進行難度和鑑別度分析。首先，研究者按照成績從高到低排序，並選取成績排名前 27% 的學生作為高分組，排名後 27% 的學生作為低分組。難度分析旨在確定每個試題的難易程度 (郭生玉, 2010)，計算方法為將高分組和低分組的答對率平均值，得到的數值即為難度指標。在難度分析中，難度值範圍在 0 到 1 之間，接近 0 表示試題較難，而接近 1 表示較容易。郭生玉 (2010) 指出將難度值範圍控制在 0.40 到 0.80 之間，以確保試題難易程度適中 (引自李宜蓁, 2021)。鑑別度分析則評估測驗試題區分學生能力的水平 (余民寧, 2022)，計算方法為高分組答對率減去低分組答對率。根據 Noll et al.(1976) 的研究，通常鑑別度值應該至少達到 0.25 以上，低於此值的試題被視為鑑別度不佳。(引自余民寧, 2022) 本測驗試題的難度範圍在 0.29 到 0.86 之間，而鑑別度則介於 0 到 1 之間，研究者將根據分析結果，刪除難度過低和鑑別度不佳的試題，以確保正式問卷的試題難易程度和區分能力的穩定性。

肆、 結論結果與分析

一、 國小六年級學童比與比值單元的解題表現概況

研究者針對自編「比與比值成就測驗」的結果進行分析，本測驗包含 24 題，每題正確得 1 分，錯誤得 0 分，總分為 24 分。研究目的主要探討國小六年級學童在「比與比值成就測驗」整體解題情況，為深入了解學童在該單元的各向度解題表現，研究者將測驗分為五個向度。透過答對人數、答對率、平均數和標準差進行學童的測驗結果的敘述性統計分析：

(一) 整體測驗結果

1. 測驗結果之各題答對人數、答對率、平均數、標準差

本研究的整體測驗結果顯示，學童的總平均分為 16.05 分，各題的答對率分佈在

14%到 96%之間。其中，第 2 題（相等的比）的答對率最高，而第 16 題（比的應用）的答對率最低。下表 3 列出各題的答對人數、答對率、平均數、標準差。

表 3

比與比值成就測驗之各題答對人數、答對率、平均數、標準差(N=237)

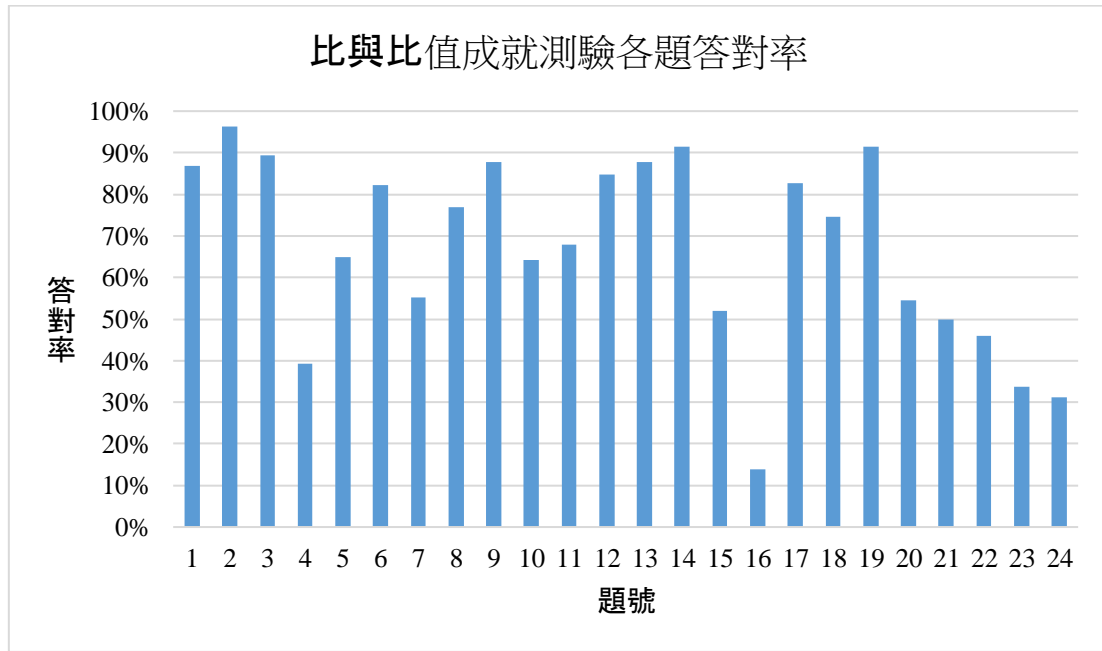
題號	答對人數	答對率	平均數	標準差
1	206	87%	0.87	0.34
2	228	96%	0.96	0.19
3	212	89%	0.89	0.31
4	93	39%	0.39	0.49
5	154	65%	0.65	0.48
6	195	82%	0.82	0.38
7	131	55%	0.55	0.50
8	182	77%	0.77	0.42
9	208	88%	0.88	0.33
10	152	64%	0.64	0.48
11	161	68%	0.68	0.47
12	201	85%	0.85	0.36
13	208	88%	0.88	0.33
14	217	92%	0.92	0.28
15	123	52%	0.52	0.50
16	33	14%	0.14	0.35
17	196	83%	0.83	0.38
18	177	75%	0.75	0.44
19	217	92%	0.92	0.28
20	129	54%	0.54	0.50
21	118	50%	0.50	0.50
22	109	46%	0.46	0.50
23	80	34%	0.34	0.47
24	74	31%	0.31	0.46
合計			16.05	4.97

根據表的資料顯示，第 5、12、17 題屬於比的意義向度，學童的答對率介於 65% 到 85%，顯示學童對比的概念已相當熟練；在第 1、8、13、18 題為比值的意義向度，答對率介於 75%到 88%，顯示學童對比值的概念也相對熟練；第 2、6、9、14、19 題為相等的比向度，答對率介於 82%到 96%，顯示學童對相等的比的概念有較高的熟悉度，並能正確計算；在第 3、7、10、15、20、21 題為最簡單整數比向度，答對率介於

50%到 89%，顯示部分學童可能尚未完全熟悉最簡單整數比的概念及計算方法；在第 4、11、16、22、23、24 題為比的應用向度，答對率介於 14%到 68%，顯示大部分學童在比的應用題型上尚不夠熟練。為了更清晰呈現這些資訊，研究者進一步以圖形方式呈現，詳見圖 1。

圖 1

比與比值成就測驗各題答對率分布圖



2.測驗結果依向度分類的平均答對率

研究者參照九年一貫課程綱要數學課程領域以及國小六年級不同版本的教材，將比與比值的學習內容區分為五個向度，以下分別說明這五個向度的內容：

題號 5、12、17 屬於比的意義向度，主要評估學童是否能理解比的概念，以及是否能適切地寫出比的形式，包括前項與後項的數值。

題號 1、8、13、18 屬於比值的意義向度，旨在了解學童是否能正確理解比值的涵義，並能夠正確地表達出比值。

題號 2、6、9、14、19 屬於相等的比向度，著重評估學童對相等的比是否有正確的理解，以及是否能計算出相對應的數值。

題號 3、7、10、15、20、21 屬於最簡單整數比向度，主要檢視學童對最簡單整數比的概念是否清晰，並且能夠正確地進行相關計算。

題號 4、11、16、22、23、24 屬於比的應用向度，主要考察學童是否能在應用情境中運用比的概念，透過比的形式列式，最終計算出問題所需的數值。

這五個向度的劃分有助於研究者針對不同層面的比與比值概念進行評估。依據各向度的表現，答對率範圍在 39%到 90%之間。在這些向度中，相等的比的答對率最高，而比的應用的答對率最低。以下是各向度、題號以及平均答對率的詳細資料，見表 4。

表 4

比與比值成就測驗之各向度的平均答對率(N=237)

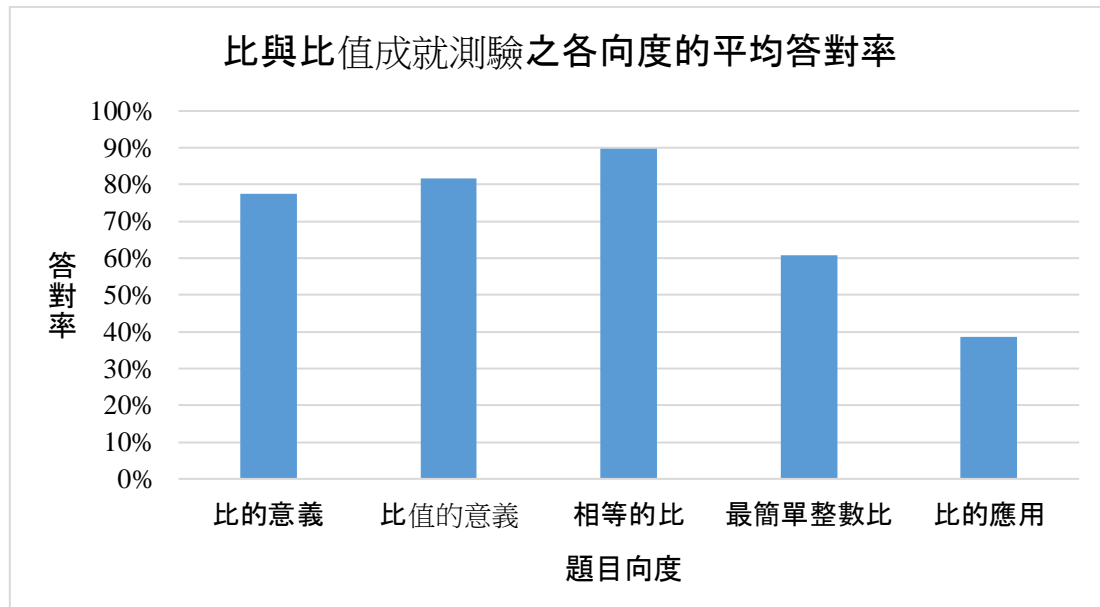
題目向度	題號	平均答對率
比的意義	5、12、17	77%
比值的意義	1、8、13、18	82%
相等的比	2、6、9、14、19	90%
最簡單整數比	3、7、10、15、20、21	61%
比的應用	4、11、16、22、23、24	39%

由表可觀察到，在除了比的應用向度之外的各向度，答對率均高於 60%。比的應用向度可能因為屬於文字應用題，而學童在此方面的解題表現相對較差。具體而言，

比的意義向度的答對率為 77%，顯示學童對比的意義已有較高的熟練度；比值的意義向度的答對率為 82%，表示學童對比值的概念也相對熟悉；相等的比向度的答對率達 90%，顯示學童在相等的比的概念和計算上有較高的熟練度；然而，最簡單整數比向度的答對率僅為 61%，顯示有部分學童在最簡單整數比的概念上仍有不足；比的應用向度的答對率最低，僅為 39%，表示大多數學童在比的應用問題上仍有待提升。研究者進一步以圖表形式呈現這些資料，詳見圖 2。

圖 2

比與比值成就測驗之各向度的平均答對率分布圖



二、國小六年級學童在比與比值單元的錯誤類型

本研究基於樣本在「比與比值成就測驗」中的答題情況，對學童的錯誤類型進行分析整理，同時探討這些錯誤類型可能形成的原因。

(一) 比與比值錯誤類型分析結果

研究者根據學童在比與比值成就測驗中所產生的錯誤類型，參考了相關文獻(周雅釧, 2009; 林福來, 1984; 陳曉琪, 2006; 黃寶彰, 2003)，歸納整理了 17 種錯誤類型，具體紀錄如下表 5。

表 5

比與比值錯誤類型代號及錯誤類型

代號	錯誤類型
B1	誤解題意 (黃寶彰 2003)
B2	錯置前項或後項 (黃寶彰 2003)
B3	前後項概念不清 (周雅釧 2009)
B4	比值概念不清 (黃寶彰 2003)
B5	比與比值概念混淆 (黃寶彰 2003)
B6	相等的比概念不清 (周雅釧 2009)

代號	錯誤類型
B7	最簡單整數比概念不清 (周雅釗 2009)
B8	最簡單整數比認知不足未化至最簡 (陳曉琪 2006)
B9	以一 (多) 步驟的方式解題
B10	忽略資訊 (林福來 1984)
B11	列式錯誤或未完整
B12	計算式錯誤
B13	單位換算錯誤 (陳曉琪 2006)
B14	單位錯誤
B15	無計算過程
B16	應用問題未寫出答案
B17	計算錯誤

研究者整理本測驗中學童出現的 17 類錯誤類型，並參考了相關文獻，其中與林福來在 1984 年科學教育月刊中對青少年的比例發展提出的「忽略部分數據」相符合，這與本研究中的「忽略資訊」錯誤類型相一致；此外，與周雅釗在 2009 年國小六年級「比與比值」單元適性診斷測驗中提出的「前後項概念不清」、「相等的比概念不清」、「最簡單整數比概念不清」相符合，這與本研究的錯誤類型相對應；陳曉琪在 2006 年以貝氏網路為基礎之能力指標測驗編製及補救教學動畫製作的研究中提出的「最簡單整數比認知不足未化至最簡」也與本研究的錯誤類型相符；最後，黃寶彰在 2003 年六、七年級學童數學學習困難研究中提出的「錯置前項或後項」、「比值概念不清」、「比與比值概念混淆」也與本研究中的錯誤類型相符。

其餘的錯誤類型是由研究者根據學童的作答情況進行自行分類的。其中，「一 (多) 步驟的方式解題」表示在應用問題中，學童未以比的形式列式，而是以一 (多) 步驟的方式解題；「列式錯誤或未完整」指在應用問題中，學童列式出現錯誤或者未完整；「計算式錯誤」表示在應用問題中，學童列式正確但計算的式子不正確；「單位錯誤」則表示應用問題中，學童答案的單位有誤；「無計算過程」表示應用問題中，學童未呈現計算的過程，直接寫出該題答案；而「應用問題未寫出答案」指在解

應用問題時，學童未書寫出答案。最後，「計算錯誤」表示在解題過程中出現了計算上的錯誤。

本研究對象由於為後疫情時代的學童受到遠距教學等因素的影響，可能使他們在學習過程中產生更多種類和更複雜的錯誤，並導致不同的錯誤形成原因。

(二) 比與比值之各向度錯誤類型分析結果

研究者將各向度之題號及錯誤類型依各向度會出現的錯誤類型整理成下表 6：

表 6

比與比值成就測驗各向度、題號及錯誤類型

題目向度	題號	錯誤類型
比的意義	5、12、17	B1、B2、B3、B17
比值的意義	1、8、13、18	B1、B2、B4、B5、B17
相等的比	2、6、9、14、19	B6、B17
最簡單整數比	3、7、10、15、20、21	B7、B8、B17
比的應用	4、11、16、22、23、24	B9、B10、B11、B12、B13、B14、B15、 B16、B17

研究者進一步分析整理本測驗之錯誤類型依各向度之樣本編號、錯誤類型、錯誤範例及可能的形成原因，樣本編號中的第一位英文字 S 代表學童；第二位數字代表各學校之代號；第三位數字代表班級代號；第四、五位數字代表學童座號，例如：「S1-101」表示第一個學校之第一個班級座號為 1 號的學童。

1. 比的意義向度錯誤類型

比的意義之錯誤類型有 4 種，分別是 B1 誤解題意、B2 錯置前項或後項、B3 前後項概念不清、B17 計算錯誤。詳細分析如下表 7：

表 7

比的意義向度錯誤類型、範例及可能的錯誤原因

樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
----------	------	------	---------

S2-202	B1 誤解題意	<p>17. 有一塊蛋糕切成 8 等份，<u>蕊蕊</u>吃了其中的 3 等份，<u>小霆</u>吃掉剩下的蛋糕，<u>蕊蕊</u>吃的蛋糕量對<u>小霆</u>吃的蛋糕量的比是(5):(3)，前項是(5)、後項是(3)。</p>	<p>樣本雖然已經計算出各分量，但可能因為不了解比的概念導致前後項混淆。</p>
S6-207	B2 錯置前項或後項	<p>12. 六年甲班全班有 28 人，其中 13 位是女生，六年甲班的男生對女生人數的比是(28):(13)，前項是(28)、後項是(13)。</p>	<p>依照出現數字出現的順序填寫前後項，未了解前後項的意義。</p>
S6-209	B3 前後項概念不清	<p>5. 用 150ml 的牛奶和 200ml 的紅茶調配鮮奶茶，紅茶對牛奶用量的比是(200):(150)，前項是(150)、後項是(200)。</p>	<p>不清楚前項與後項的意義，導致前項是比的後者、後項是比的前者。</p>
S4-104	B17 計算錯誤	<p>12. 六年甲班全班有 28 人，其中 13 位是女生，六年甲班的男生對女生人數的比是(16):(13)，前項是(16)、後項是(13)。</p>	<p>計算錯誤導致比的前項數值錯誤。</p>

2.比值的意義向度錯誤類型

比值的意義之錯誤類型有 4 種，分別是 B1 誤解題意、B2 錯置前項或後項、B4 比值概念不清、B5 比與比值概念混淆、B17 計算錯誤。詳細分析如下表 8：

表 8

比值的意義向度錯誤類型、範例及可能的錯誤原因

樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
S6-107	B1 誤解題意	<p>18. 禮倫到圖書館裡借了 9 本書，其中 3 本是小說，其餘是漫畫書，禮倫借的漫畫書對小說數量的比是</p> <p>$(3):(6)$， 比值是$(\frac{3}{6})$。</p>	未依題意內容寫出前項與後項；也可能受前一個答案影響，導致比值錯誤。
S6-103	B2 錯置前項或後項	<p>18. 禮倫到圖書館裡借了 9 本書，其中 3 本是小說，其餘是漫畫書，禮倫借的漫畫書對小說數量的比是</p> <p>$(9):(3)$， 比值是(3)。</p>	將先出現的數字作為前項、將數字後出現的作為後項；也可能受前一個答案影響，導致比值錯誤。
S6-211	B4 比值概念不清	<p>1. 爸爸的體重 85 公斤，哥哥的體重 62 公斤，爸爸對哥哥體重的比是</p> <p>$(85):(62)$， 比值是$(\frac{62}{85})$。</p>	比值概念不清楚，將比值記為後項除以前項。
S2-219	B5 比與比值概念不清	<p>8. 一束花有 8 朵花，其中有 3 朵是白玫瑰，剩下的是紅玫瑰，紅玫瑰對白玫瑰個數的比是</p> <p>$(5):(3)$， 比值是$(5:3)$。</p>	比與比值概念混淆，將比值紀錄為比。
S3-108	B17 計算錯誤	<p>13. 泡一杯拿鐵需要咖啡 30ml 和牛奶 120ml，咖啡對牛奶容量的比是</p> <p>$(30):(120)$， 比值是(4)。 $30 \div 120 = 4$</p>	計算錯誤導致比值錯誤。

3.相等的比向度錯誤類型

相等的比之錯誤類型有 2 種，分別是 B6 相等的比概念不清、B17 計算錯誤。詳細分析如下表 9。

表 9
相等的比向度錯誤類型、範例及可能的錯誤原因

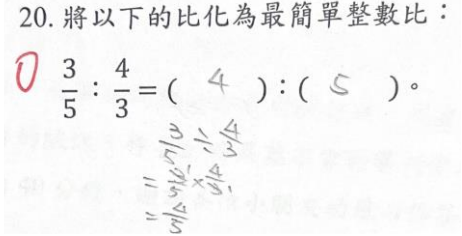
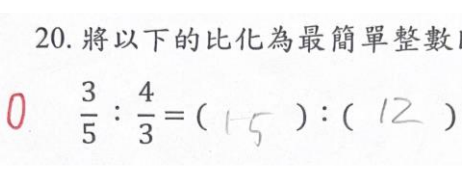
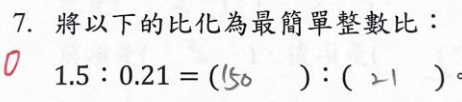
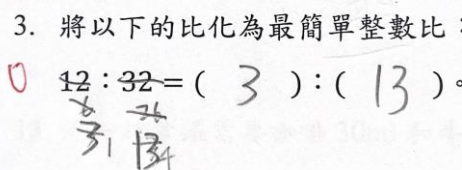
樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
S2-210	B6 相等的比 概念不清		不清楚相等的比之算則，已知第二項與第四項互相為 7 倍的關係，第一項與第三項誤用 7 倍或 $\frac{1}{7}$ 倍。此類學童常發生乘除選擇符號的困難。
S1-422	B17 計算錯誤		清楚相等的比之算則，計算錯誤導致答案錯誤。

4.最簡單整數比向度錯誤類型

最簡單整數比之錯誤類型有 3 種，分別是 B7 最簡單整數比概念不清、B8 最簡單整數比認知不足未化至最簡、B17 計算錯誤。詳細分析如下表 10。

表 10
最簡單整數比向度錯誤類型、範例及可能的錯誤原因

樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
S6-203	B7 最簡單整數比概念不		不清楚最簡單整數比的概念，混淆比與乘法算

	清		則。利用乘法策略，將前項與後項相乘並約分，其值作為最簡單整數比的前項與後項。
S6-214	B7 最簡單整數比概念不清	<p>20. 將以下的比化為最簡單整數比：</p> 	樣本了解比與除法算則的關係，但異分母除法時計算錯誤。
S6-208	B7 最簡單整數比概念不清	<p>20. 將以下的比化為最簡單整數比</p> 	不清楚最簡單整數比的概念，利用乘法策略，將前項與後項的分母相乘作為最簡單整數比之前項；前項與後項的分子相乘作為最簡單整數比之後項。
S6-102	B8 最簡單整數比認知不足未化至最簡	<p>7. 將以下的比化為最簡單整數比：</p> 	知道比的概念算則，但未化簡成最簡單整數比。
S3-105	B18 計算錯誤	<p>3. 將以下的比化為最簡單整數比：</p> 	將比的前後項同時進行約分，計算錯誤導致最簡單整數比之值錯誤。

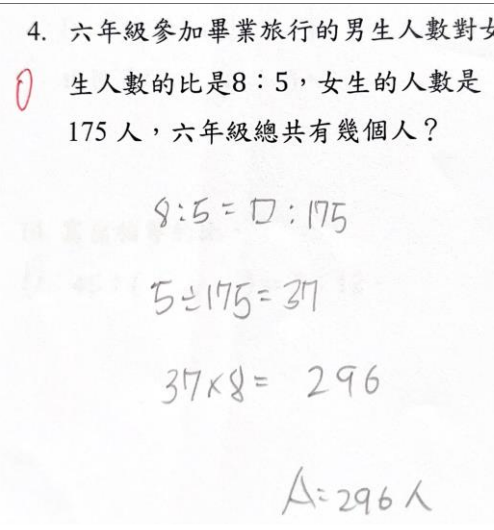
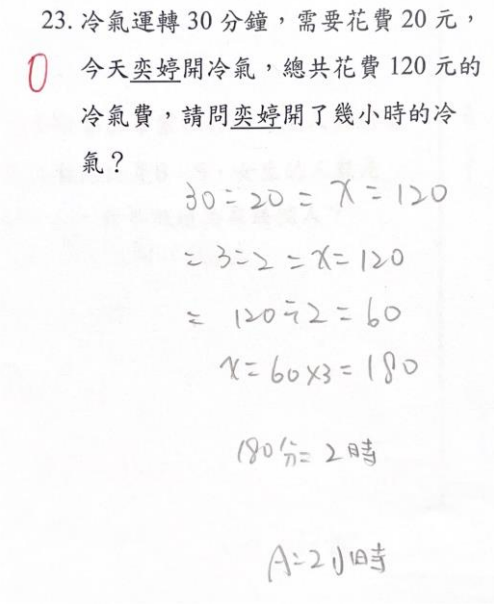
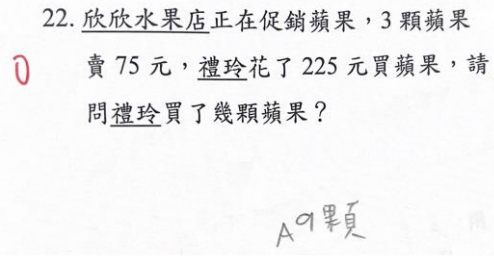
5. 比的應用向度錯誤類型

比的應用之錯誤類型有 9 種，分別是 B9 以一（多）步驟的方式解題、B10 忽略資訊、B11 列式錯誤或未完整、B12 計算式錯誤、B13 單位換算錯誤、B14 單位錯誤、B15 無計算過程、B16 應用問題未寫出答案、B17 計算錯誤。詳細分析如下表 11。

表 11

比的應用向度錯誤類型、範例及可能的錯誤原因

樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
S4-105	B9 以一 (多)步驟 的方式解 題、B14 單 位換算錯誤	<p>23. 冷氣運轉 30 分鐘，需要花費 20 元， 今天奕婷開冷氣，總共花費 120 元的 冷氣費，請問奕婷開了幾小時的冷 氣？</p> $120 \div 20 = 6$ $30 \times 6 = 180$ $180 \text{分鐘} = 6 \text{小時}$ <p>A: 6 小時</p>	<p>利用兩步驟的方式解題，缺乏比的概念；也可能單位換算錯誤，導致答案錯誤。</p>
S2-104	B9 以一 (多)步驟 的方式解 題、B11 忽 略資訊	<p>4. 六年級參加畢業旅行的男生人數對女 生人數的比是 8:5，女生的人數是 175 人，六年級總共有幾個人？</p> $175 \div 5 = 35$ $8 \times 35 = 280$ <p>A: 280 人</p>	<p>利用兩步驟的方式解題，缺乏比的概念；也可能未看清楚題意所求，導致答案錯誤。</p>
S6-120	B11 列式錯 誤或未完整	<p>16. 果農收成芒果和芭樂共 77 顆，芒果對 芭樂數量的比是 2:3.5，請問果農收 成了幾顆芭樂？</p> $2:3.5 = 77:0$ $0 = 3.5 \times 77 \div 2$ $= 134.75$ <p>A: 134.75 顆</p>	<p>未依題目所求列式，混淆分量與整體量的關係，導致答案錯誤。</p>

樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
S1-119	B10 忽略資訊、B12 計算式錯誤	<p>4. 六年級參加畢業旅行的男生人數對女生人數的比是8:5, 女生的人數是175人, 六年級總共有幾個人?</p> 	依題目所求列式, 利用錯誤計算式; 也可能未看清楚題意所求, 導致答案錯誤。
S1-322	B12 計算式錯誤、B13 單位換算錯誤	<p>23. 冷氣運轉 30 分鐘, 需要花費 20 元, 今天奕婷開冷氣, 總共花費 120 元的冷氣費, 請問奕婷開了幾小時的冷氣?</p> 	依題意列式正確, 但未了解等號的等價關係, 誤用等號連接比與計算式; 也可能單位換算錯誤, 導致答案錯誤
S6-103	B15 無計算過程	<p>22. 欣欣水果店正在促銷蘋果, 3 顆蘋果賣 75 元, 禮玲花了 225 元買蘋果, 請問禮玲買了幾顆蘋果?</p> 	無計算過程, 直接寫出正確答案。

樣本 編號	錯誤類型	錯誤範例	可能的錯誤原因
S1-113	B16 應用問題未寫答	<p>11. 姊姊的零用錢對妹妹零用錢的比是 5:2, 妹妹有 50 元, 請問姊姊的零用錢有多少元?</p>	計算出正確答案, 未寫出答案。
S6-113	B12 計算式錯誤、B14 單位錯誤	<p>22. 欣欣水果店正在促銷蘋果, 3 顆蘋果賣 75 元, 禮玲花了 225 元買蘋果, 請問禮玲買了幾顆蘋果?</p>	依題意列式正確, 直接以等號進行計算式; 也可能未於答案中寫出題意之單位。
S2-107	B18 計算錯誤	<p>4. 六年級參加畢業旅行的男生人數對女生人數的比是 8:5, 女生的人數是 175 人, 六年級總共有幾個人?</p>	計算錯誤導致答案錯誤。

(三) 討論

本研究彙整了學童在比與比值單元中常見的錯誤類型。根據上述比與比值的錯誤類型, 研究者歸納出可能的錯誤原因, 其中包括:

1. 整體量或分量的概念不清，例如前項與後項數值相反、依先後出現順序為前後項。
2. 混淆比與比值的概念，例如將比值誤記為比。
3. 誤解題意，例如分量值未符合題意。
4. 不清楚比的相關算則，例如相等的比、最簡單整數比的算則錯誤。
5. 對比的觀念不清，例如在應用問題中以兩步驟方式解題。
6. 閱讀理解題目的能力不足，例如忽略題意資訊，未依題目所求列式或單位。
7. 基本運算能力不足，例如計算錯誤、單位換算錯誤。
8. 書寫粗心，例如應用問題未寫出答案、答案未寫出單位。

藉由釐清這些錯誤類型及其可能的成因，有助於教育者針對學生的具體困難點提供更有針對性的教學與輔導。本研究整理出學童在比與比值單元中常出現的錯誤類型。根據以上比與比值的錯誤類型，研究者整理出學童可能的錯誤原因，整體量或分量的概念不清，例如：前項與後項數值相反、依先後出現順序為前後項；比與比值概念混淆，例如：將比值紀錄為比；誤解題意，例如：分量值未符合題意；比的相關算則不清，例如：相等的比、最簡單整數比之算則錯誤；比的概念不清，例如：應用問題以兩步驟方式解題；閱讀理解題目能力不足，例如：忽略題意資訊，未依題目所求列式或單位；基本運算能力不足，例如：計算錯誤、單位換算錯誤；書寫粗心，例如：應用問題未寫答案、答案未寫出單位。

伍、 結論與建議

一、 研究結論

(一) 國小六年級學童在比與比值成就測驗各題及各向度的表現各有不同

國小六年級學童在本測驗中，學童在比的應用題表現相較於其他題差，而在相等的比題型上表現較好，從五個向度的劃分可以看出，學童在不同層面的比與比值概念上呈現出不同的表現。特別是在相等的比方面，學童表現出較高的理解和應用能力，而在比的應用方面則呈現出較低的表現。

(二) 國小六年級學童在比與比值單元的錯誤類型共有十七種類型

1. 國小六年級學童在比與比值單元的錯誤類型

根據研究結果顯示，國小六年級學童在比與比值單元解題中出現了十七種不同的錯誤類型：誤解題意、錯置前項或後項、前後項概念不清、比值概念不清、比與比值概念混淆、相等的比概念不清、最簡單整數比概念不清、最簡單整數比認知不足未化至最簡、以一(多)步驟的方式解題、忽略題意資訊、列式錯誤或未完整、計算式錯誤、單位換算錯誤、單位錯誤、無計算過程、應用問題未寫出答案、計算錯誤。

2. 國小六年級學童在比與比值單元錯誤類型之可能形成的原因

根據錯誤類型研究結果得出，國小六年級學童在比與比值單元解題中出現的錯誤類型可能有八種不同的因素所造成，具體如下：

- (1) 整體量或分量的概念不清，例如：前項與後項數值相反、依先後出現順序為前後項。
- (2) 比與比值概念混淆，例如：將比值紀錄為比。
- (3) 誤解題意，例如：分量值未符合題意。
- (4) 比的相關算則不清，例如：相等的比、最簡單整數比之算則錯誤。
- (5) 比的概念不清，例如：應用問題以兩步驟方式解題。
- (6) 閱讀理解題目能力不足，例如：忽略題意資訊，未依題目所求列式或單位。
- (7) 基本運算能力不足，例如：計算錯誤、單位換算錯誤。
- (8) 書寫粗心，例如：應用問題未寫答案、答案未寫出單位。

二、研究建議

(一) 對教師教學的建議

根據本研究的結果顯示，國小六年級學童在相等的比方面表現較為出色，其次是比值的意義向度和比的意義向度。但在比的意義和比值的意義向度的解題過程中，多數學童容易出現對題意的誤解或忽略題目中的關鍵資訊，尤其是將先出現的數字視為前項而導致解題失誤。建議教師在教授比與比值單元時，尤其在開始階段，應更加注重學生對前項和後項的理解，並提供更多相似類型的練習，以幫助學生更清晰地理解和掌握比和比值的意義。

根據本研究結果顯示，國小六年級學童在比的應用向度的表現普遍較差，特別是在文字應用題的解題能力上，顯示出有待加強的空間。多數學童在解題過程中容易忽略題目的關鍵資訊或誤解題意，導致列式出現錯誤。建議教師在教授比的應用向度時，應引導學童細心閱讀題目敘述，並將關鍵資訊標示清楚，確保學生能夠正確理解題意，進而有效地進行列式解題，從而提高他們在應用問題解題上的準確性。

(二) 對未來研究的建議

由於本研究受到人力、時間等因素的限制，僅選擇了臺南市地區八所小學作為研究樣本。在有限的樣本基礎上，研究結果可能無法完全代表國小六年級學童在比與比值單元解題表現的整體情況。因此，建議未來的研究可以克服人數或地域的限制，擴大研究樣本規模，以提高研究結果的準確性和代表性，從而進行更為精確的推論。

研究者在分析學童在比與比值單元解題時常見錯誤類型時，僅限於了解錯誤類型的種類，未深入探討學童錯誤解題方式的根本原因。建議未來的研究可以進一步深入探討學童錯誤解題的成因，尤其是針對常見的計算錯誤，另外也建議教師不僅要提醒學童在計算時要更加仔細，並提供更多的計算練習機會。同時，鼓勵學童在完成題目後仔細檢查其計算過程，以降低學童在計算方面的錯誤率。

陸、 參考文獻

- [1] 方文邦、劉曼麗 (2013)。對國小四年級數學低成就學童在分數學習的迷思概念 / 錯誤類型與其成因之探討。科學教育月刊，**358**，20-35。

[https://doi.org/10.6216/SEM.201305_\(358\).0002](https://doi.org/10.6216/SEM.201305_(358).0002)

- [2] 余民寧 (2022)。教育測驗與評量：成就測驗與教學評量 (四版)。心理
- [3] 呂溪木 (1983)。從國際科展看我國今後科學教育的發展方向。科學教育月刊，
64，13-19。
- [4] 李宜蓁 (2021)。以萬用揭示板融入國小五年級「小數的乘法」單元對學童學習成就之影響研究〔碩士論文，國立臺南大學〕。臺灣博碩士論文知識加值系統
<https://hdl.handle.net/11296/ujaxm9>
- [5] 周雅釗 (2009)。國小六年級「比與比值」單元之適性診斷測驗與教材研發。〔碩士論文，國立臺中教育大學〕。臺灣博碩士論文知識加值系統
<https://hdl.handle.net/11296/477gcc>
- [6] 林福來 (1984)。青少年的比例概念發展。科學教育月刊，**73**，7-26。
- [7] 涂金堂 (2009)。教育評量與測驗。三民。
- [8] 張景媛 (1994)。數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究。教育心理學刊 **27**，175-200。<https://doi.org/10.6251/BEP.19940601.7>
- [9] 教育部 (2008)。九年一貫課程綱要數學學習領域。教育部。
- [10] 教育部 (2018)。十二年國民基本教育課程綱要。教育部。
- [11] 教育部國民及學前教育署 (2016)。補救教學基本學習內容-國民小學數學學習領域。教育部國民及學前教育署
- [12] 郭正仁 (2001)。高雄市國二生多項式四則運算錯誤類型之研究〔碩士論文，高雄師範大學〕。臺灣博碩士論文知識加值系統 <https://hdl.handle.net/11296/z7j4be>
- [13] 郭生玉 (2010)。教育測驗與評量。精華。
- [14] 陳曉琪 (2005)。以貝氏網路為基礎之能力指標測驗編製及補救教學動畫製作 - 以六年級數學領域之「比和比值」相關指標為例〔碩士論文，亞洲大學〕。臺灣博碩士論文知識加值系統 <https://hdl.handle.net/11296/3s9kw2>
- [15] 黃寶彰 (2003)。六、七年級學童數學學習困難部分之研究〔碩士論文，國立屏東師範學院〕。臺灣博碩士論文知識加值系統 <https://hdl.handle.net/11296/jgj6f2>
- [16] 劉秋木 (2002)。國小數學科教學研究。五南。
- [17] Ashlock, R. B. (2005). *Error Patterns in Computation: Using Error Patterns to Improve Instruction* (9th ed.). Prentice Hall.
- [18] Carmines, E.G., & Zeller, R.A. (1979). *Reliability and validity assessment*. Sage.

- [19] Lamon, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, 89-120.
- [20] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. *Number concepts and operations in the middle grades*, 2, 93-118
- [21] Noll, V. H., Scannel, D. P., & Craig, R. C. (1979). *Introduction to educational measurement* (4th ed.). Houghton Mifflin.
- [22] Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. *Number concepts and operations in the middle grades*, 2, 53-92.