International Journal of Science and Engineering
http://www.scieng.nutn.edu.tw/ch/item.php
International Journal of Science and Engineering (issued by NUTN) VoL.7 No.1(2017)21-52
Doi : 10.6159/IJSE.2017.(7-1).02

A Study of Learning Effectiveness of Circumcenter, Incenter and Centroid of Triangle with GSP Dynamic Teaching Method for the Ninth Graders

Zi-Yi Chen and Bih-Sheue Shieh
Houjia Junior High School, Tainan, Taiwan.
Dept. of Applied Mathematics, National University of Tainan in Taiwan.

Abstract

This study aims to explore the learning performance of 9th graders using the GSP teaching method to learn circumcenter, incenter and centroid of triangle. The class which was taught by the researcher is selected as the experimental group and received the GSP dynamic teaching method. On the other hand, the class which is chosen as the control group received the traditional mathematical teaching method. Three conclusions were reached after conducting statistic analysis on the data collected from the experiment teaching:

1. Mathematical learning achievement: The GSP dynamic teaching method can significantly improve the student's learning achievement on learning circumcenter, incenter and centroid of triangle.

2. Mathematical learning performance and retention: Students from the class which are chosen as experimental group, showed outstanding learning performance and great learning retention toward the GSP dynamic teaching method.

3. Learning attitude toward mathematics: Most of the students from the experimental group thought that the GSP dynamic teaching method was special and interesting. Therefore, they showed positive and affirmative attitude toward this teaching method.

Key words: GSP, Dynamic teaching method, the three triangle centers (incenter, circumcenter and centroid).

探討 GSP 動態教學對國三學生學習三角形外心、內心及重心之成效

陳子宜 台南市立後甲國中

謝碧雪* 國立台南大學應用數學系

摘要

本研究主要目的在探討 GSP 動態教學對國三學生學習三角形外心、內心及重心之成效，以研究者任教的班級為實驗班，對實驗班進行 GSP 動態教學，對照班則採用傳統講述教學。教學實驗結束後，將研究所得之各項資料經統計處理分析後，得到下列三項結果：

一、在數學學習成就方面：「GSP動態教學」能有效提升學生三角形三心學習成效且達顯著效果。

二、在數學學習成效保留效果方面：「GSP動態教學」對實驗班學生三角形三心學習成效具顯著的保留效果。

三、在數學學習態度方面：實驗班大部分學生對於「GSP動態教學」模式認為特殊且有趣，因此對「GSP動態教學」的看法及態度上，大多能抱持正向及肯定的態度。

關鍵字：GSP、動態教學、三角形三心

1. 前言

據希臘學者普羅克洛斯（約410～485年）轉述歷史記載，亞歷山大國王多祿米曾師從歐幾里得學習幾何，有一次對於歐幾里得一遍又一遍地解釋他的原理表示不耐煩，國王問道：「有沒有比你的方法簡捷一些的學習幾何學的途徑？」(陳明遠，2008)時至今日，這一問題仍是台灣許多師生共同的期待與願望。根據我國教育部統計處的資料，教育部在2009年對全國八百多所國中小學校，十多萬名學生進行調查，結果顯示：國小、國中及高中學生最不喜歡的科目都是數學，學生不喜歡上數學課程的原因，主要是認為數學艱深難懂、令人乏味，其中大部分學生在數學幾何圖形的學習上有很大挫折感。在研究者將近二十年教學經驗中，學生對於幾何部分學習挫敗感遠大於其它數學主題，其中更有許多學生放棄學習數學，實在令人感到惋惜！

荷蘭數學教育家Van Hiele主張學生之幾何思考可以分為五個層次，依序分別為：視覺期 (Visualization) 、描述期 (Analysis)、非形式演繹期 (Informal Deduction)、形式演繹期 (Deduction)、嚴密期 (Rigor)。視覺期的兒童藉著視覺觀察各種具體事物，從各種實體物的外形輪廓來辨認圖形。他們可以使用非數學的術語，知道各種圖形，但是卻無法了解這些圖形的真實意義。描述期的兒童已經具有辨別圖形特徵的能力，他們能利用視覺來觀察組成圖形的構成要素（頂點、邊、角）與這些要素之間的關係，分析幾何概念，此層次的兒童尚無法經由推理而知悉其道理何在。描述期

這個層次的兒童已經具有辨別圖形特徵的能力，他們能利用視覺來觀察組成圖形的構成要素（頂點、邊、角）與這些要素之間的關係，分析幾何概念，此層次的兒童尚無法經由推理而知悉其道理何在。非形式演繹期的兒童不但能夠了解、掌握、運用構成圖形之各種要素，並且能夠進一步探求各種幾何圖形之內在屬性（即構成要素間關係的非形式推理）以及各圖形之間的包含關係。形式演繹期的學生能夠經由抽象推理過程，來證明各種幾何問題，同時能夠知道證明的方法不只一種。嚴密期是屬於最高層次，達到這個層次的學習者通常能夠在不同公設體系中，建立定理並且分析或比較包括非歐幾何不同公設系統；他們同時也能夠了解抽象的幾何概念。在此層次之學生，能學習不同幾何公設系統，了解抽象推理幾何，並能互相比較不同公設系統。層次分析可以發掘學生的學習障礙，當學生在較低層次時，遭遇到需要較高層次的字彙、概念、性質或思考方式的問題時，學生的學習無法有進步，無法以現有知識將教材恰當地同化入他自己的認知架構中，在這種情況下，預期學生會感覺沮喪、焦慮，甚至於生氣。

既然要「成就每一位孩子」，教師怎能放棄任何一位學生呢？既然我們學生有逐漸討厭數學的趨勢，身為第一線數學教育的我們實在是責無旁貸，有機會改善此一現象，我們都當盡力一試。研究者在將近二十年的數學教學現場觀察，深深覺得幾何教學有不同於其它數學單元之處，其中最明顯的區別在於進行幾何教學時，往往需要藉助「圖形的變化」來說明，若要清楚具體讓學生明瞭講述內容，透過傳統講述進行板書教學，往往事倍功半，在這裡我們舉三個板書在幾何教學常見的問題：

1. 缺乏效率：在使用大型笨重的三角板與圓規時，往往耗費大量的時間，影響上課進行的流暢度；同時教師不易掌控背後學生的學習狀態。
2. 容易有誤差：比方說：線段長度不精準、角度大小不夠明確、兩線交點容易偏差而影響到圖形所要闡述的資訊等等。
3. 傳統講述法無法呈現動態變化：在國中數學幾何課程中，有些單元所探討的是圖形之間相對位置與其對應的幾何變化量，例如：講述兩圓位置關係時，若只用傳統講述法來教導學生，不易具體呈現出兩圓從外離狀態如何演變至內離狀態。雖然書商有提供電子書或影音動畫，但常常無法在細膩處符合教師授課所需，因為絕對不可能有別人比你更了解自己想要的教學安排與教學路徑。

GSP(Geometer's Sketchpad)是一種動態幾何系統，目前已推出GSP 5.06 版本，GSP適合用在數學幾何教學中，因它可從基本的尺規作圖組合出較複雜的幾何圖形，也可從固定的結構圖形中做出連續變化，比方說：三角形的外心位置，具有連續變化的特性。當三角形外觀改變時，外心位置也隨之改變。當銳角三角形時，外心在三角形內部；直角三角形時，外心位置則在斜邊中點；鈍角三角形時，外心位置卻可以移動至三角形外部，此種變化，若以傳統講述教學來說明，大部分老師都會建議學生直接記憶內容，如此教法實在無法吸引學生注意力！而用 GSP 畫出來的圖形在電腦上即是一個物件，移動物件的過程中會產生痕跡，連結起來會變成動畫，動畫的展示除了增強幾何關係，同時亦可增加學生研究及學習的興趣。

本研究依據康軒版國中數學課本第五冊之教材，藉由GSP軟體來編寫此次動態視覺

化上課教材，藉此提供學生觀察、操作、檢驗與歸納的學習情境。鼓勵學生勇於猜想、盡情發問，從做中學、從錯中悟；讓數學教學可以透過類似實驗的方式，來呈現「三角形三邊中垂線是否真的會相交於同一點？」、「改變一下三角形外觀，外心的位置是否真得會移動到三角形的外部？」類似這種傳統講述教學不易呈現的教學問題，藉由學生親手操作，透過動態視覺化呈現出三角形三心各種表徵，將數學抽象概念具體化，透過圖形、數值與符號等多重連結，吸引學生主動探索三角形三心。

2. 研究方法

2.1. 研究設計

本研究是以台南市後甲國中的兩個三年級班級為研究對象，實驗設計採不等組前測－後測設計

（對照組）	O_1	C（接受傳統講述教學）	O_2		
（實驗組）	O_3	X（接受GSP動態教學）	O_4	O_5	O_6

設計的主要步驟可分為下列六個：

1. 選定兩個數學程度相近的班級，一為對照班 ，另一為實驗班。
2. O_1：對照班上學期第一次數學段考成績，O_3：實驗班上學期第一次數學段考成績。
3. 對照班接受實驗處理C(接受傳統講述教學)，實驗班接受實驗處理X(接受GSP動態教學)。
4. 電腦教室完成上課後，實驗班接受對GSP融入數學教學的態度調查表(O_4)。
5. 授課九節課後，兩班一起接受後測(成績分別為O_2、O_5)。
6. 寒假結束後，開學後幾天，在沒有告知學生的情況下，利用上課時間對本次實驗班進行延後測，其成績為O_6。

本研究之自變項與控制變項說明如下：

2.1.1. 自變項

1. 對照班：傳統講述教學九節課，採用教師講課，學生聽講的方式進行教學。
2. 實驗班：GSP動態教學七節課，在電腦教室進行教學，學生每人一台電腦，可以實際操作GSP軟體，深刻感受三角形三心動態的呈現。其餘兩堂課，回普通教室完成課本自我評量部分與習作題目，並填寫對GSP融入數學教學的態度調查表。

2.1.2. 控制變項

1. 起點行為：由上學期第一次段考數學成績做兩班學生數學成績(對照班平均68.4，標準差為21.84；實驗班平均64.3，標準差為28.48)做獨立樣本t檢定，得知兩班成績並無顯著差異(p值為0.55)，故數學起點能力相同。
2. 授課時數：兩班皆上九節課。
3. 教材內容：皆為康軒版國中數學第五冊3－2三角形的外心、內心、重心。

2.2. 教學流程與設計

2.2.1. 教學流程

1. 對照班教學流程：本次對照班進行三角形三心教學，主要是一般的傳統講述教學法，課程結束後，再接受後測。
2. 實驗班教學流程：實驗班的教學實驗以電腦教室上課為主(7節)，普通教室上課為輔(2節)；實驗教學期間，記錄教學心得。由於從來沒有使用過電腦教室來上數學課，所以在上此單元前，相關電腦教室預借與電腦教室設備的操作練習，必須提前完成。茲將此次的教學流程，以下圖2－1說明。

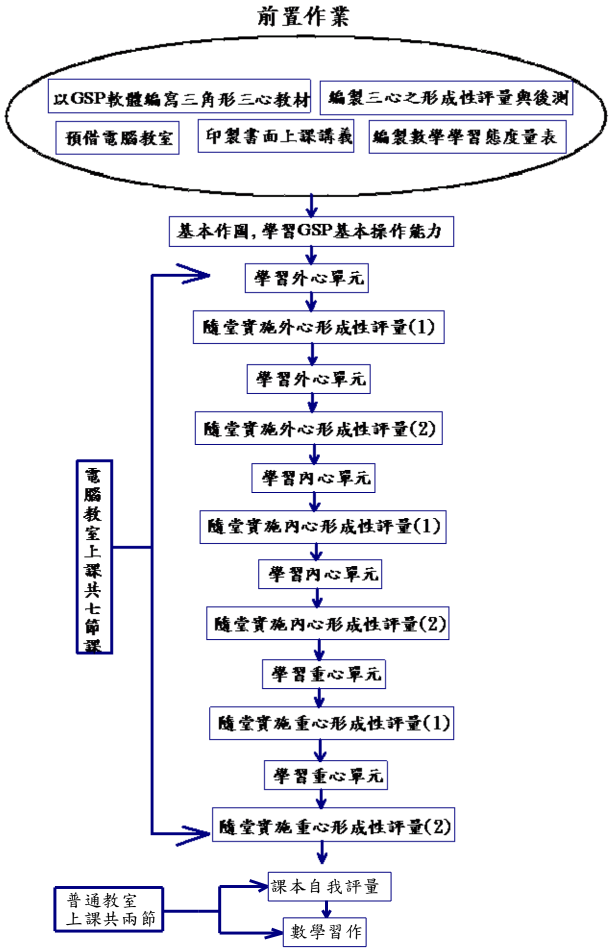


圖 2-1

圖2-2

2.2.2. 實驗班教學設計

本次研究所設計的課程內容概分為三部分：三角形的外心，三角形的內心及三角形的重心。茲以外心為範例，其餘請見附錄一。

三角形的外心

1. 三中垂線是否相交於一點：我們在第二章時學到，一個四邊形四邊的中垂線不一定會交於一點，因此任意四邊形不一定有外接圓。那三角形的情況是否也是如此呢？那我

們就必須要檢查其三邊的中垂線是否一定會交於一點。首先我們知道三角形的兩邊中垂線並不平行，因此兩邊的中垂線必定會相交一點，令此點為O，但第三邊的中垂線是否也可以通過O點呢？先畫出 $\overline{AB}$ 的中垂線與 $\overline{BC}$ 的中垂線，最後將動畫F點沿著 $\overline{AC}$ 的中垂線移動，可先暫停在O點附近，讓學生猜測最後的結果。

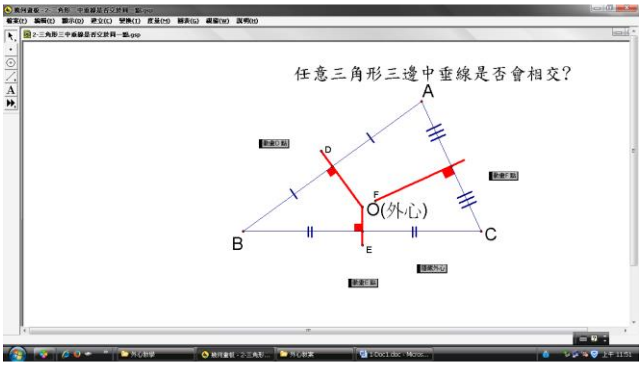


圖2－2 任意三角形三邊中垂線是否相交於同一點

2. 三角形的外心性質：透過猜測的結果，三邊的中垂線會交於一點。並且請同學在各自的電腦上，製作三角形三邊的中垂線，讓學生確實瞭解三角形三邊中垂線的確會交於一點，此點我們稱為三角形的外心。接著教師畫出三角形的外接圓，讓學生知道外心到三頂點的距離其實是外接圓的半徑。最後請學生自行檢驗 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$ 三個線段的距離。課堂結束前，請同學各自上傳課堂作業(GSP檔)

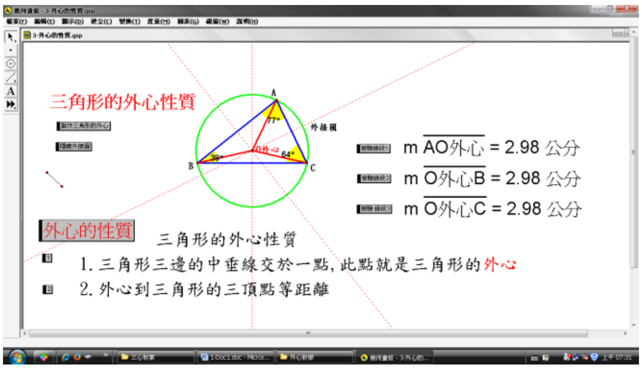


圖2－3 三角形外心的性質

3. 三角形外心的位置：接著我們希望學生可以明瞭外心的位置會隨著三角形的形狀不同而有不一樣的情況。首先透過等腰三角形的情況引入，隨著動點A向下移動，外心的位置也隨之改變，進一步我們可以將A點向右或向左任意移動，形成任意銳角三角形的外心在內部，直角三角形的外心在斜邊中點，鈍角三角形的外心在外部。在過程中

我們可以在介紹直角三角形的外心位置時，可以強調半圓上的圓周角皆為直角的特性，與第二章圓的內容相互印證。

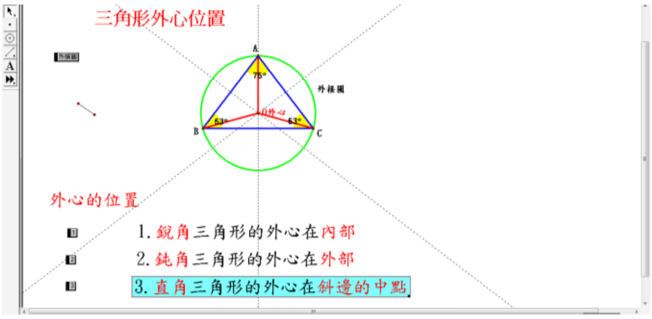


圖2－4 外心的位置

4. 外心的角度問題：透過GSP動態的呈現，輔以外角定理數學證明的論述，讓學生知道當∠BAC為銳角時，∠BOC＝2∠BAC會成立，最後將三角形的外接圓畫出，讓學生可以將此問題與對同弧的圓心角度數是圓周角度數的兩倍作聯結。

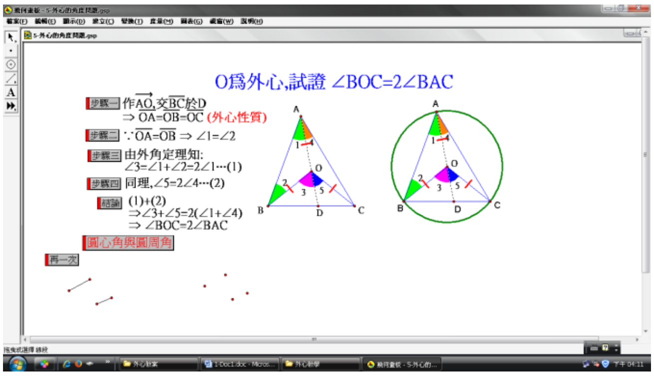


圖2－5 外心的角度問題(一)

5. 外心的角度應用：建議學生在做此類型問題時，先將外接圓畫出，利用圓心角與圓周角彼此間的關係，便可輕鬆解決此類型問題。

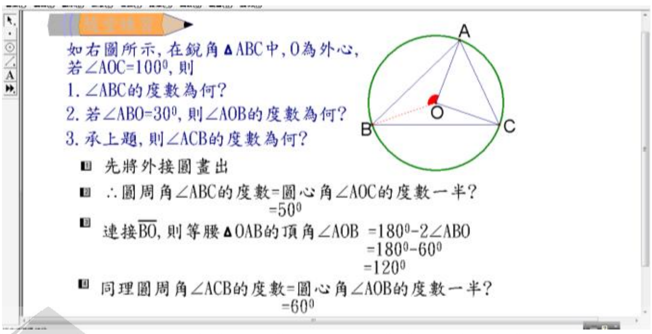


圖2－6 外心角度隨堂練習

6. 外心的角度問題：透過GSP動態的呈現，輔以多邊形內角和定理數學證明的論述，讓學生知道當∠BAC為鈍角時，∠BOC＝360°－2∠BAC會成立，最後將三角形的外接圓畫出，讓學生可以將此問題看成為∠BOC＝劣弧 BAC ，優弧 BDC ＝2∠BAC。

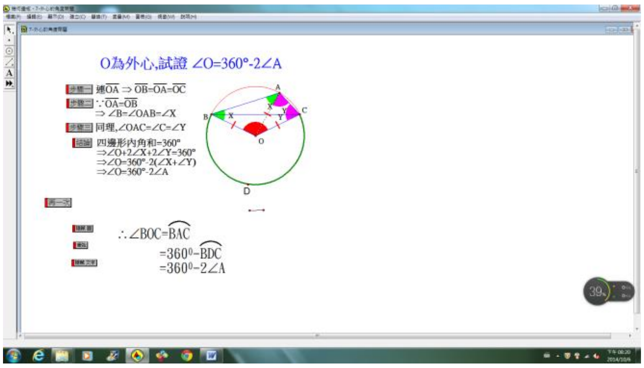


圖　2—7 外心角度問題(二)

7. 外心的角度應用：我們可以提醒學生，若題目沒有圖形或指明三角形是何種類型三角形時，我們應該將可能的情況一一列出。

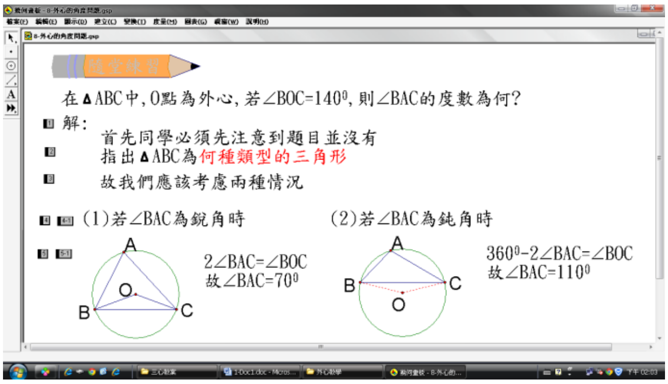


圖2—8 外心角度綜合練習

8. 外心的長度問題：我們可以將常見的三角形外心長度問題歸納成三大類。

(1)直角三角形的外心會在斜邊的中點，故外心到頂點的距離恰好是斜邊長度的一半，再依題意，依序解題。

(2)等腰三角形的外心會落在底邊的中垂線上，若底邊上的高小於底邊的一半時，外心會落在三角形外部，此時稍稍停頓一下，請學生思考看看，為何落在外部？我們可以引導學生試著結合第四冊第三章邊角關係，進而判斷出等腰三角形的頂角必大於90°。再搭配畢氏定理依題意依序解題。

(3)正三角形的外心會在高上，搭配畢氏定理依題意解題即可。答案解出後，請同學觀察看看，外心到頂點的距離是高的幾倍？為往後的重心問題留下伏筆。

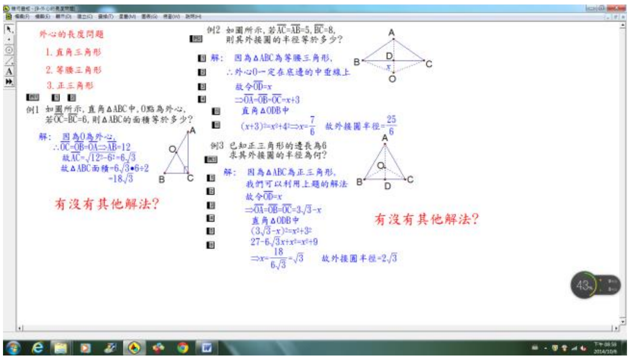


圖2－9 外心的長度問題

2.3. 研究工具

為達成研究目的，本研究將編製三角形三心成就測驗當後測。並將後測題目稍微改編，形成延後測，並編製對 GSP 融入數學教學的態度調查表。以瞭解學生學習三角形三心之學習成效及透過GSP動態教學，是否可以增強學生學習數學之意願。分述如下：

2.3.1 後測

2.3.1.1. 初稿

後測之初稿係依據國中數學教材綱要編寫，符合三角形三心的教學目標，並且從研究者多年的教學相關教材檔案中，精選數題，最後加入幾題研究者自創之題目編製而成。題目原先共有25題，經過對照班老師審題之後，刪減5 題，最後剩下選擇10題，填充題10題，每題各五分，而後形成預試之試卷。

2.3.1.2. 預試

此次研究之授課班級為三年級，所以在校內並沒有更高年級的學生曾經學過此單元課程，故請去年兩位畢業生(今年為高一學生)返校協助進行預試。表2－1為兩位高一生寫完試卷後之建議彙整。

表2－1 預試後之建議

學生	難易度									
A	選擇題									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	易	易	易	易	中	易	中	中	中	易
	填充題									

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	易	易	易	中	易	易	中	中	中	中
B	選擇題									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	易	易	易	易	中	易	中	中	難	易
	填充題									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	易	易	易	中	易	易	中	中	中	易
	建議									
A	1. 有些題目可以轉多點彎 2. 適合國三考題 3. 具有評量性 4. 有多種觀念考題									
B	1. 適合國三考題 2. 富有創意 3. 題目多有設計									

2.3.1.3. 形成後測試卷

預試完成後，研究者再延請校內兩位資深數學教師，敦請他們做最後的審題與建言。表2－2為兩位資深數學教師的審題建言：

表2－2 兩位資深數學教師之審題建言彙整

教師	審題建言
A	1. 建議選擇題第3題加入敘述：小明將下圖(一)向左對折，使得 $\overline{AC}$ 落於 $\overline{AB}$ 上的 $\overline{AC'}$ ，而……最後將圖(二)往後對折，使得 $\overline{BD}$ 落於 $\overline{AB}$ 上的 $\overline{BD'}$ ……題意較為清楚。 2. 大致上而言，題目適當具鑑別度。 3. 選擇第2 題、第3 題及填充第6題是三心的概念題，很靈活。 4. 選擇第9 題及填充第9 題同質性高且較難。

B	1.整體而言偏難。 2.可增加計算題或引導式證明題。 3.對學習較高成就的區段學生，具有鑑別度。 4.填充第2題的題意可增加說明清楚想問的是什麼？(△內、外、邊上？)

最後根據預試結果與兩位專家建言，將試題做適度的修正與調整，最後形成後測試卷。此份試題共分成三大題：第一大題選擇題共計10題 、第二大題填充題共計8 題、第三大題計算題共有2 題(請見附錄二)。

2.3.2. 延後測試卷

將後測試題稍微改編(題目敘述一樣，數字不變，只將題號改變，答案順序做調整，形成延後測試卷)。在未告知實驗班同學情況下，寒假結束後，開學後幾天，利用上課時間對實驗班進行延後測。

2.3.3. 對GSP融入數學教學的態度調查表

對 GSP 融入數學教學態度調查表，乃參考凌久原(2007）對 GSP 融入數學教學態度調查表，再依研究需求加以修改，編製出對 GSP 融入數學教學態度調查表（請見附錄四）。

3. 研究結果

3.1 實驗班與對照班後測之比較分析

後測試卷實驗班收回28份、對照班27份，平均分數分別為68.2級51.7，經獨立樣本t檢定結果p值為0.009，達到顯著差異，亦即以不同的教學法（GSP動態教學**v. s.** 傳統講述教學）來進行三角形三心相關概念教學時，對實驗班及對照班學生之數學學習成就的影響，有顯著差異。因此我們可以知道「GSP動態教學」明顯有效提升學生在三角形三心的學習成效。

3.2 實驗班後測與延後測之比較分析

實驗班延後測平均成績為73.93，優於後測的68.21，經成對樣本t檢定結果p值為0.023，達到顯著差異；可知道實驗班接受「GSP動態教學」，學生在三角形的三心學習成效上具有顯著性之保留效果。

3.3 使用GSP軟體輔助學習的態度分析

教學實驗結束後，除了知道學習成就的改變之外，情意上的改變亦相當重要。因此，探究實驗班學生對GSP融入數學教學有何想法與建議有其必要性。

在實驗班第八課堂回到普通教室上課時，請實驗班學生完成對GSP融入數學教學態度調查表。學生對於使用GSP軟體輔助學習三角形三心的學習態度，乃是實施電腦輔助教學成功與否關鍵之一。對GSP融入數學教學的態度調查表共有15題，前14題項目包含有：GSP軟體基本操作、課程設計、學習成效、學習興趣等四個主題。最後一題為開放式問題，有關於實驗班學生對於使用GSP軟體來學習數學的滿意度與建議。前面14題採五點李克氏（five-point Likertscale）的計分方法，分成四個向度討論。

3.3.1. GSP軟體基本操作：在這個向度內共有三題如下:

題號	問題敘述	平均得分
1	二年級老師上幾何課程時，就有使用過GSP繪圖軟體，之後我利用課餘時間加以研究，對於GSP軟體操作已經有一定程度的熟悉了。	3.22
2	透過老師三年級數學課程前補救教學，對於GSP繪圖軟體的操作，我在電腦上的操作大致上沒有問題。	3.59
6	我對電腦的操作較不熟悉，透過電腦來學習三心問題，讓我覺得壓力很大。	3.52

本研究之實驗班教學活動一大部份時間是由學生親自操作「GSP動態幾何教學軟體」，以引導探究式教學策略來引導他們做探索、觀察、研究三角形三心相關性質的學習活動。這個學習活動，將回歸到以學生為學習的主體，讓學生進行三心相關圖形的探索，所以學生應該具備幾項基本幾何作圖操作能力。先讓學生熟悉GSP軟體的基本操作，用意是為了接下來學生在自行探索、建構、釐清概念的過程中，不致於因軟體操作上的問題而產生困擾。

3.3.2. 課程設計：在這個向度內共有三題如下:

題號	問題敘述	平均得分
3	透過GSP繪圖軟體融入學習課程，我能了解學習單上老師講解的操作步驟。	3.93
4	在操作GSP的學習中，螢幕上的呈現方式(例如：圖形的移動、顏色區分、動態呈現等)會加深我對三心問題的印象。	4.07
8	我覺得透過GSP的教學課程，可以將課本中的教材，更具體呈現出來，讓我更容易理解課本中的內容。	3.85

本研究之課程設計，除了將課本大部分內容融入教案中，並且設計幾個動態教學，讓學生觀察並猜測結果，透過圖形的轉換移動，顏色鮮明的區分，藉著利用此軟體具體呈現幾何圖形的方式，讓學生進行觀察、猜測、操作與驗証的數學學習。讓學習不再只是背誦、強記公式，這個方法提昇了學生的學習熱情，學生藉著自己親身參與和操弄，進而

自然而然能對該名詞、概念有較深刻的理解，提升學生的學習興趣。下面是幾個學生對這方面的具體回饋建議:

(1)小評提到:因為動畫GSP能讓他加深印象，課堂的形成性評量單能讓他再一次複習課堂內容，所以他認為「GSP動態教學」對他的學習非常有幫助。

(2)小豪提到：他認為可以看到圖形移動的路徑，對他的學習相當有幫助。

(3)小諺提到：他認為「GSP動態教學」能讓課本平面圖形用動畫具體呈現，讓他有深刻的印象。

(4)小庭提到：她認為可以讓她動手操作製作幾何圖形，加深學習印象。

(5)小璇提到：「GSP動態教學」讓她在數學方面更加了解，而且在演算相關數學題目時，會有相關的畫面出現，讓她在解題時，更加順利，印象也更加深刻。不會死背一些數學公式，有GSP輔助，使得那些公式轉為圖像。

(6)小伶提到：使用GSP軟體來學習，可以加深對圖形的印象，在解題目時可以在腦海中回想。

(7)小秦提到：她說：透過GSP軟體融入學習活動，老師很清楚地一個步驟、一個步驟操作，讓她了解到一些幾何的原理，也能夠一個一個拆解、或動態移動，顏色區分，每一個都很鮮明地呈現在螢幕上，比只看課本還清楚。

3.3.3. 學習成效方面的態度與反應：在這個向度內共有四題如下:

題號	問題敘述	平均得分
5	我認為三心問題課程用GSP軟體來輔助學習相當適合。	3.78
9	GSP融入數學學習的教學模式，對我在數學幾何解題上有很大的幫助。	3.59
10	我認為GSP輔助數學學習的課程設計，比較能夠引我的學習動機。	3.41
11	我認為GSP的教學課程設計上，根本是多此一舉，毫無意義可言。	4.19

大部分的學生對「GSP動態教學」持正面的看法，多數學生提到GSP融入數學學習的教學模式，對他們在解題過程中有很大的幫助。甚至連平時在課堂中學習意願低落的學生，也舉手說需要老師的協助，這實在令人覺得振奮！

3.3.4. 學習興趣：在這個向度內共有三題如下:

題號	問題敘述	平均得分
12	我覺得學會操作GSP繪圖軟體，可以擴大我的數學視野。	3.48
13	GSP融入數學學習的教學模式，對我在數學幾何解題上有很大的	3.33

	幫助。	
14	我認為GSP輔助數學學習的課程設計,比較能夠引我的學習動機。	3.33

大部分學生對於GSP動態教學模式認為特殊且有趣，然而對低成就學生而言，因GSP教學而提升學習成效仍有限,有學生說他在家也會玩一下 GSP,希望可以多學習一些GSP其他的功能。研究者也認為若能讓學生多學會一些數學軟體,這對他們往後在數學學習這條道路上，無異多了一項有力的助手，學習除了有趣之外，更希望可以達到有意義的學習。

4. 建議

從本研究的實施過程與研究結果所得到的經驗中,研究者提出在教學方面、以及在未來研究方面的建議。

4.1 教學方面的建議

4.1.1. 教師必須先具備GSP軟體基本操作能力

本研究成敗關鍵之一，就是學生能親自操作GSP軟體，在自行探索、建構、釐清概念過程中，逐步建立屬於自己三心幾何心像，而不只是片面記憶三心意涵。在學生操作過程中，學生會有各式各樣GSP尺規作圖操作上的疑問，此時教師可以立即給予指導，更可在指導過程中，進一步加強連結紙上尺規作圖原理。在此次電腦教室教學過程中，研究者發現學生的學習能力很強，甚或在學生之中，已有人可以充當GSP小老師了，可以幫忙協助教導其他學生!

4.1.2. GSP相關教學教材的整合與建置

製作相關的GSP數學教材非常耗時，甚且在製作過程中，難免會有個人不易發現之缺失，若能在科內找到幾位志同道合教師夥伴，共組教師專業成長群，以團隊合作的方式，編寫製作一套完整GSP電腦輔助教學的數學教材。

4.1.3. 電腦教室上課應注意事項

到電腦教室上課之前，應與學生先行約法三章:

(1)上課鐘打前3分鐘進電腦教室，預備上數學課。

(2)嚴禁非法下載、非法上網、隨時監控切換學生電腦螢幕。

(3)盡情發問、勇於嘗試錯誤！在電腦教室上課期間，留意三細節：

　(1) 放慢速度、一步一步講解。

　(2) 多一些時間讓學生親自操作、探索、諮詢。

　(3) 適時適宜走動式教學、全場走透透。

4.2. 未來研究之建議

4.2.1. 擴大樣本數

由於此次研究對象只有兩個班級，雖然兩個班級起始點條件差不多，若能增加實驗班與對照班研究群組，其客觀性便能更增強!建議做法如下:透過教研會時間，建議全校三年級任教數學教師分組實施「GSP動態教學」與「傳統講述教學」群組，其成果可納入學校數學領域課程創新教學評鑑。

4.2.2. 拉長研究觀察時間

此研究主題實施時間只有九節授課節數，實驗時間不算長，若能將此研究主題擴及涵蓋三上整學期數學課程，除了時間拉長可以觀察短時間所引發的學習動機是否可以轉化為長時間的學習動力？更可以增加其它單元之研究，讓整個研究結果更具有參考價值!

5. 參考文獻

王藝閎（2014）。**GSP動態幾何軟體融入國小中年級學童鑲嵌飾創造力課程行動研究**。 私立淡江大學教育科技學系碩士在職專班學位論文。

尤冠龍（2006）。**幾何繪圖軟體GSP 融入國中數學教學對學生學習成就與態度影響之研究**。國立彰化師範大學科學教育研究所碩士班論文。

吳德邦、馬秀蘭、藍同利、陳泰勳（2004）。**使用 VAN HIELE 五階段學習模式開發九 年一貫課程第一階段圖形與空間教材教法之詮釋性研究**。行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告(NSC 92-2522-S-142 -004)。國立台中師範學院數學教育系。

李俊儀（2003）。**資訊科技融入數學教學模組之開發與研究**。國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班碩士論文。

余鄺惠（2003）。**高雄市高職學生運用GSP軟體學習三角函數成效之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

李春生 (2005)。**高雄市國二學生使用GSP電腦輔助教學學習三角形全等成效之研究**。 國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

李瑞林（2009）。**GSP電腦輔助教學對國三學生學習三角形外心、內心及重心成效之研究**。國立政治大學應用數學系數學教學碩士在職專班碩士論。

吳怡儒、蔡文榮、李林滄（2012）。**彰化縣偏遠地區國中學生數學學習態度及其影響因素之研究**。教育科學期刊（11卷，1期）。

李宜臻（2013)。**資訊融入數學教學對學習成就與學習態度影響之研究——以昌爸數學網站為例**。私立康寧大學數位應用研究所碩士論文。

邢維禮、高世良（2004)。**國中幾何動動動**。台北市：聯經。

林星秀（2001)。**高雄市國二函數課程GSP輔助教學成效之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

林佳慧（2003)。**探討動態幾何環境中函數課程教學成效之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

林順隆（2005)。**電腦軟體GSP輔助國中幾何單元教學之學習成效研究**。私立佛光大學教育資訊學研究所碩士班論文。

林佩蓁、林淑娟、陳融匀、高松景（2010)。**學了幾何又如何---玩出立體幾何之美。** 臺北市第11屆中小學及幼稚園教育專業創新與行動研究。

胡凱華（2001)。**動態幾何環境中圓形概念教學成效之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

姚文仁（2006)。**國中三角形相關概念GSP補救教學之成效研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

凌久原（2007)。**動態多重表徵對於國中生幾何單元學習成效之影響**。國立成功大學教育研究所碩士論文。

教育部（2003)。**國民中小學九年一貫課程綱要**。台北：教育部。

教育部（2014)。**十二年國民基本教育課程綱要(草案)**。台北：教育部。

康軒文教 (2014)。**國中數學第五冊**。新北市：康軒文教。

康軒文教 (2014)。**國中（數學領域）1～3年級課程架構表。**新北市：康軒文教。

康軒文教 (2014)。**國中數學教師手冊第五冊**。新北市：康軒文教。

張美珠（2003)。**動態環境中廣義角概念學習之研究**。國立台灣師範大學數學研究所數學教育組碩士論文。

郭昭慧（2004)。**國中三角幾何GSP輔助教學之學習成效研究**。私立義守大學資訊管理學系碩士班論文。

楊子賢（2011)。**幾何動態軟體融入教學的模式對國中學生學習平行四邊形的影響研究**。私立中原大學教育研究所學位論文。

劉晏企（2004)。**動態幾何GSP融入國小四年級數學領域三角形與角度單元教學之研究**。國立屏東師範學院數理教育研究所碩士班論文。

鄭雅瀞（2009)。**幾何圖形介面教學對於增進幼兒推理思考能力之研究**。南華大學應用藝術與設計學系應用藝術與設計學報4期。

戴錦秀（2002）。**國小五年級學生使用電腦軟體GSP學習三角形面積成效之研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

鍾登宏（2004）。**國小六年級學童運用G.S.P.動態幾何電腦軟體及傳統的實物操作學習放大縮小和比例尺相關概念成效之比較**。國立臺北教育大學數理教育研究所碩士論文。

謝世杰（2006）。**有關三角函數圖形的平移和單向伸縮變換之電腦輔助補救教學之相關研究**。國立台灣師範大學數學系在職進修碩士班論文。

蘇聖文（2007）。**國中相似形GSP電腦輔助教學之成效研究**。國立高雄師範大學數學系碩士班論文。

羅成婷（2011）。**運用GSP軟體融入國小幾何面積教學成效之研究**。國立台灣師範大學資訊教育研究所碩士論文。

大學塾（2014）。**Van Hiele幾何思考的發展模式**。

http://km.tyes.ntpc.edu.tw/f2blog/index.php?load=read&id=1927

李亞蘭（1995）。**電腦輔助教學**。

http://terms.naer.edu.tw/detail/1680599/

林保平（2000）。**動態數學軟體簡介**。

http://myweb.utaipei.edu.tw/~plin/MathBoard/Project1/dynamath.pdf

馮忠良（2000）。**建構主義學習理論對新課程的影響**。

http://wiki.mbalib.com/zh-tw/%E5%BB%BA%E6%9E%84%E4%B8%BB%E4%B9%89%E5%AD%A6%E4%B9%A0%E7%90%86%E8%AE%BA#_note-1

陳越（2002）。**建構主義與建構主義學習理論綜述。**

http://translate.google.com.tw/translate?hl=zh-TW&sl=zh-CN&u=http://www.being.org.cn/theory/constructivism.htm&prev=search

陳明遠（2008）。**科學精神-----歐幾里德留給現代文明的寶貴遺產**。

http://translate.google.com.tw/translate?hl=zh-TW&sl=zh-CN&u=http://blog.sina.com.cn/s/blog_4bbb74a5010094a6.html&prev=search

教育部（2013）。**教育有愛・學習無礙－公告「補救教學教材」**。

http://www.moe.gov.tw/news1/detail.aspx?Node=1088&Page=17447&wid=6635a4e8-f0de-4957-aa3e-c3b15c6e6ead&Index=1

陸、附錄

附錄一

三角形的內心

1.三角形三內角平分線是否相交於一點：我們先將動點 A 沿著∠BAC 的角平分線移動，接著將動點 B 沿著∠ABC 的角平分線移動，令兩軌跡的交會點為 I，最後將動點 C 沿著∠ACB 的角平分線移動，並將動點 C 停留在 I 點附近，我們請學生猜測最後動點 C 是否會通過 I 點？接著我們可以改變三角形內角的度數，同樣的步驟，依舊可以得到三角形三角平分線會交於一點。

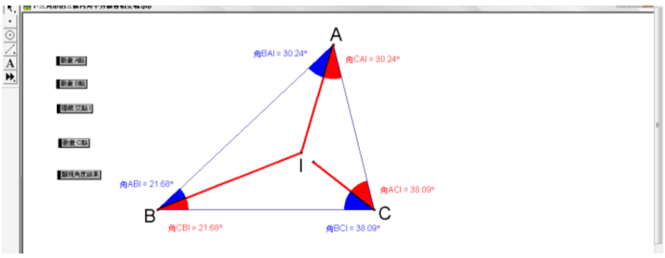


圖 6－1 三角形的三內角平分線是否相交於一點

2. 三角形的內心性質：我們試著用嚴謹的數學論證，先說明 I 點為∠A，∠B 的角平分線交點，利用角平分到角的兩邊等距離的特性，得到 $\overline{IQ}=\overline{IP}$ ，於是 $\overline{IC}$ 亦為∠C 的角平分線，得到三角形三內角平分線的確會交於一點。透過 GSP 動態的呈現，輔以數學論證，藉此增進學生對數學論證的接受度。最後我們請同學在電腦上製作三角形的內心，並呈現內心到三邊的距離，最後檢驗內心到三邊等距離的特性。最後上傳課堂作業。

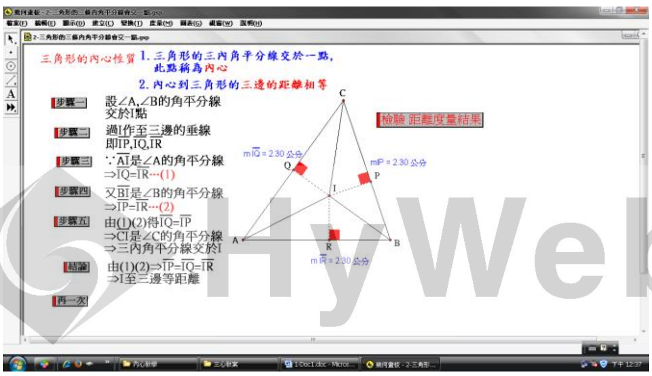


圖 6－2 三角形內心性質

3. 三角形的內切圓：延續上述的內容，我們以 I 為圓心，$\overline{IP}$ 為半徑可以畫出一個圓通過 Q、R 兩點，且 $\overline{IP}\perp\overline{BC}$、$\overline{IQ}\perp\overline{AC}$、$\overline{IR}\perp\overline{AB}$，所以我們可以稱此圓為三角形的內切圓。接著我們改變 C 點的位置，改變∠C 的大小，呈現出無論三角形是何種類型三角形，I 點永遠都在三角形的內部。

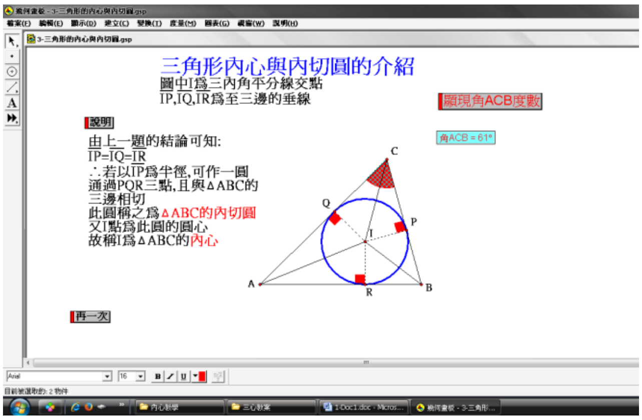


圖 6－3 三角形的內切圓

4. 三角形內心角度問題：我們可利用三角形的內角和定理與飛鏢定理來論證∠BIC＝$90^{\circ}+\frac{1}{2}\angle A$，輔以 GSP 動態呈現，來加強學生的接受度，最後我們舉個例子加以說明，並且利用 GSP 量角度的功能，立即檢驗算式是否正確？

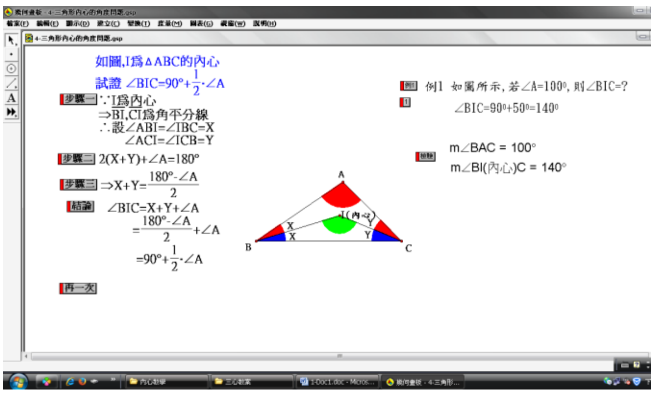


圖 6－4 三角形的內心角度問題

5. 三角形內切圓半徑公式推導：我們透過內切圓半徑會垂直其切線的特性，讓內切圓半徑成為每個小三角形的高，透過數學式子推演，輔以 GSP 動態呈現來說明△ABC 面積＝$\frac{1}{2}$×三個底長×內切圓半徑，簡記成△面＝$\frac{1}{2}$×Sr，最後透過三角形面積的轉換，藉由 I 點的移動，依序將△AIB 面積、△BIC 面積、△CIA 面積轉變合成另一個三角形的面積，在解釋過程中再一次強調兩平行線之間的距離會處處相等。透過面積的轉換，讓學生較容易接受 S 為底邊長，r 為高的△面積概念。

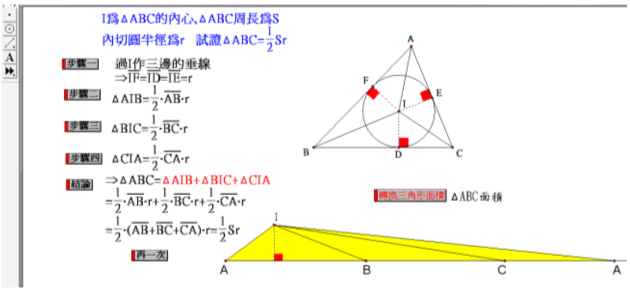


圖 6－5 三角形的內切圓半徑公式

6. 三角形內切圓半徑公式運用：如下面例題，首先我們先將圖形資訊標示在圖形上，顯然我們可以透過畢氏定理，算出等腰三角形底邊上的高為 8，進而算出三角形的面積為 48，最後利用內切圓半徑公式(△面＝$\frac{1}{2}$xSr)，我們便可以求出內切圓半徑＝3

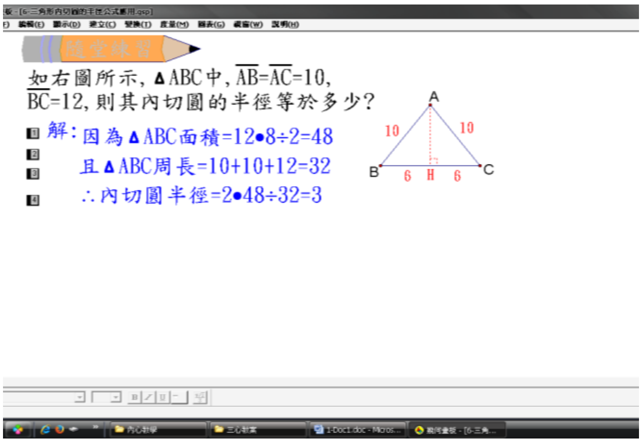


圖 6－6 三角形內切圓半徑練習

7. 直角三角形內切圓半徑公式及運用：針對直角三角形內切圓半徑公式的推導，透過 GSP 動態呈現出切線長會相等，進而推出一個簡潔公式：直角三角形兩股和＝斜邊長＋內切圓直徑。最後我們舉個簡單的例子，利用公式求出直角三角形內切圓的半徑問題。

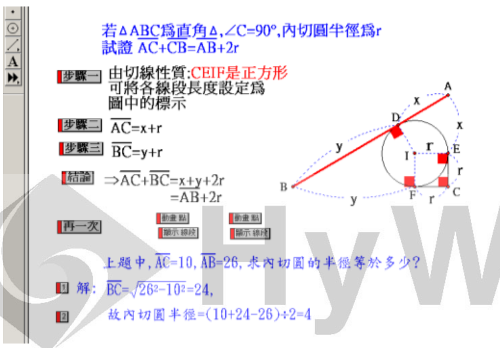


圖 6－7 直角三角形內切半徑公式動畫

8. 三角形內心相關綜合問題：

(1)根據題意，我們可以針對兩個三角形來處理，首先 P 為△ABC 的內心，透過內心的角度公式，我們可以先得到∠BPC 的度數。同時 Q 為△PBC 的內心，透過內心的角度公式，我們就能得到∠BQC 的度數了。

(2)首先我們透過 GSP 動態的呈現，將各個線段長標示出來，最後列出方程式，解方程式，最後便可求出每個線段長度。

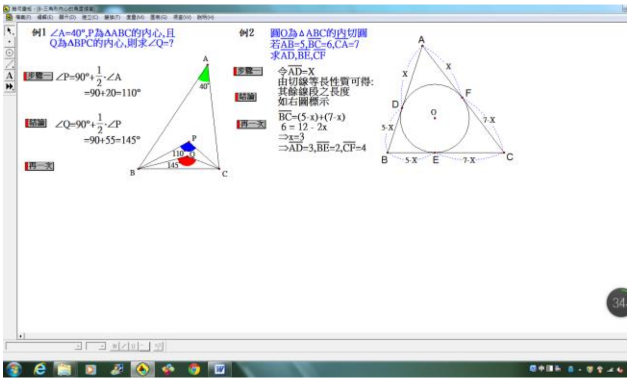


圖 6－8 三角形內心綜合問題

9. 直角三角形內切圓與外接圓的綜合運用：因為直角三角形的外心在斜邊的中點，所以斜邊便是外接圓的直徑，所以斜邊長＝10，接著透過內切圓的半徑公式(兩股和＝斜邊長＋內切圓直徑)，便可以得到兩股和＝14，最後便可以 得到三角形的周長＝24。

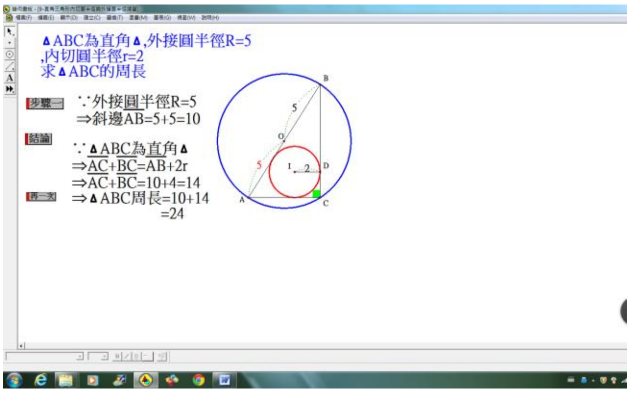


圖 6－9 直角三角形內切圓與外接圓的綜合運用(邢維禮、高世良，2004)

10. 直角三角形內心相關證明：首先我們透過 GSP 動態的呈現，將各個線段長標示出來，經由畢氏定理可以列出：

$(y+r)^2+(x+r)^2=(x+y)^2$，將式子展開化簡可得到 $yr+xr+r^2=xy$，由△ABC 面積

$=\dfrac{(y+r)(x+r)}{2}=\dfrac{xy+yr+xr+r^2}{2}$

最後可得△ABC 面積＝xy。

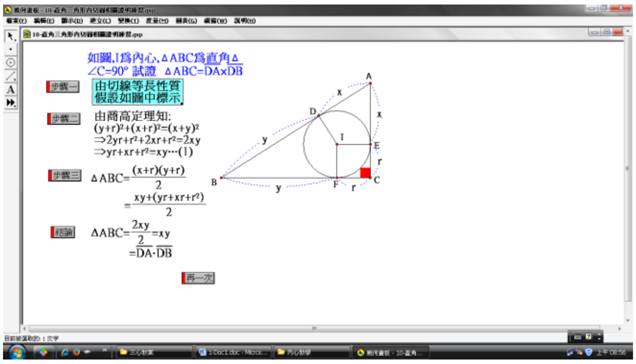


圖 6－10 直角三角形內心相關證明　(邢維禮、高世良，2004)

11. 圖解上題結果：首先我們可以提示同學要善用 D 點為內切圓與斜邊的切點，所以通過 D 點的直徑會垂直斜邊，搭配題目要證明△面積＝$\overline{DA}\times\overline{DB}$，似乎要將△面積轉變成長方形面積的概念。根據這樣的想法出發，在 $\overrightarrow{DI}$ 上，取 $\overline{DQ}=\overline{DA}$，以 $\overline{DB}$ 為長，$\overline{DQ}$ 為寬作一個矩形 BDQT，在全等形的概念下，將藍色區塊整塊搬移，將紅色區塊翻轉，透過 GSP 動態呈現，讓學生更容易理解上題證明結果。

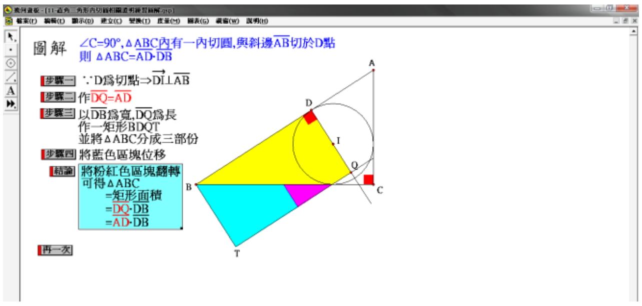


圖 6－11 直角三角形內心相關證明圖解法(邢維禮、高世良，2004)

12. 三角形內切圓與外接圓相關證明：根據題意，圓 I 為△ABC 的內切圓，所以 I 為△ABC 的內心，所以∠1＝∠2，配合圓周角的概念，我們可以得到 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$，再利用等弧對等弦概念，便可以先得證 $\overline{AD}=\overline{CD}$。再來針對 $\overline{AD}=\overline{DI}$ 的部分來論述，利用 GSP 動態呈現將動點 B 繞著圓周移動至 A 點，對同弧的圓周角度數會相等，得到∠2＝∠6。再利用外角定理得到∠5＝∠1＋∠3＝∠6＋∠4，故得到 $\overline{AD}=\overline{DI}$ 的論證。

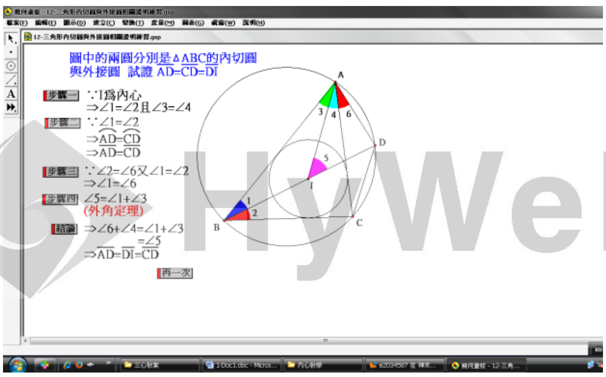


圖 6－12 三角形內切圓與外接圓相關證明　(邢維禮、高世良，2004)

三角形的重心

1. 同高的三角形面積比：兩個同高的三角形面積比＝底邊的比。我們透過 GSP 動態的呈現，將綠色面積區塊與黃色面積區塊同時拿出，讓學生清楚知道個別三角形的底與高的位置，進而透過數學式子的推演，我們可以得到兩個同高的三角形面積比＝底邊的比。

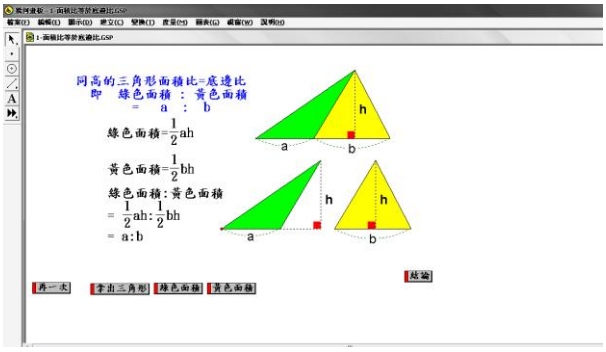


圖 6－13 同高的三角形面積比 （邢維禮、高世良，2004）

2. 三角形中線的介紹與中線性質：我們透過 GSP 動態的呈現，讓學生知道只要將三角形任一邊的中點與對面頂點連接起來，這個連接起來的線段我們稱為三角形的一條中線。由上面同高三角形面積比＝底邊比，我們知道三角形面積會被此中線平分。下面重心的面積性質，我們常會用到這個中線性質。

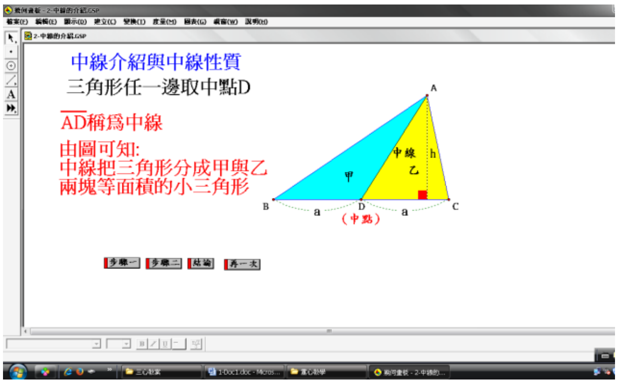


圖 6－14 三角形中線的介紹與中線性質 （邢維禮、高世良，2004）

3. 三角形的三邊中線是否交於同一點：首先我們先連接中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$，令兩中線的交點為 G，最後延長 $\overrightarrow{CG}$ 交 $\overline{AB}$ 於 F 點。最後我們只須驗證 $\overline{AF}$ 與 $\overline{BF}$ 是否等長？我們可以請學生在 GSP 畫板上，先點選 A 點與 F 點，緊接著點選建立(C)內線段，最後點選度量(M)內長度，畫板上便會顯現 $\overline{FA}$ 的長度。同樣也可以測量出 $\overline{FB}$ 的長度。

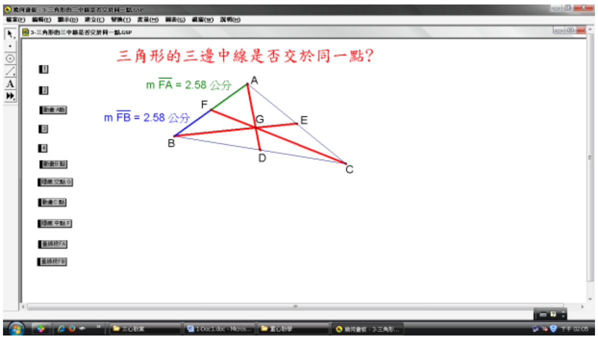


圖 6－15 三角形的三中線是否相交於同一點(動畫)

4. 三角形的三邊中線會交於一點：上面只是 GSP 畫板呈現出來的結果，在數學上我們可以用較為嚴謹的推理過程，來論證其存在的真實性，也希望學生們可以慢慢試著學到數學論證的方式。首先我們先利用三角形兩邊中點連線長會平行底邊，且中點連線長恰好為底邊長的一半，進而推出△GDE～△GAB(AA 相似)，(到此再一次提醒學生必須留意兩個相似三角形的對應角關係及對應邊關係)，既得兩個三角形相似，故對應邊長成比例，因此 $\overline{GD}$ ： $\overline{GA}$ ＝ $\overline{DE}$ ： $\overline{AB}$ ＝1：2。同樣的道理，令 $\overline{AD}$ 與 $\overline{CF}$ 交於 G' ，同樣地我們也可以推得 $\overline{G'D}$ ： $\overline{G'A}$ ＝1：2，這樣便可論述三角形三中線會交於一點。

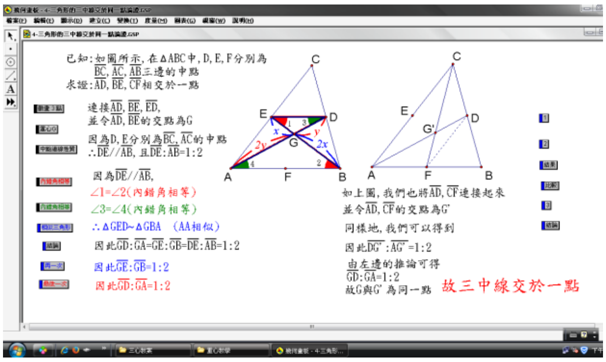


圖 6－16 三角形的三邊中線會交於一點(論述法)

5. 三角形的重心介紹與其面積性質：這個部分主要利用中線(面積)性質來論述，搭配 GSP 動態呈現出各個區域面積，最後利用 GSP 畫板度量(M)量測各個區域面積，驗證其結果。接著提出問題：是否可以利用重心的面積性質來驗證各個線段之比例。

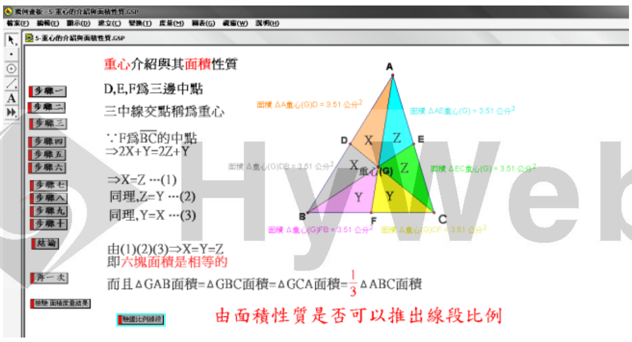


圖 6－17 三角形的重心面積性質

6. 三角形的重心性質(比例線段)：接續上段結尾部分，由面積比推出線段比例，這個部分主要利用同高面積比＝底邊比來論述，搭配 GSP 動態呈現出各個區域面積，最後利用 GSP 畫板度量(M)量測各個線段長度，驗證其結果。最後改變 A 點的位置，呈現出不同的三角形仍有重心性質(比例線段)。

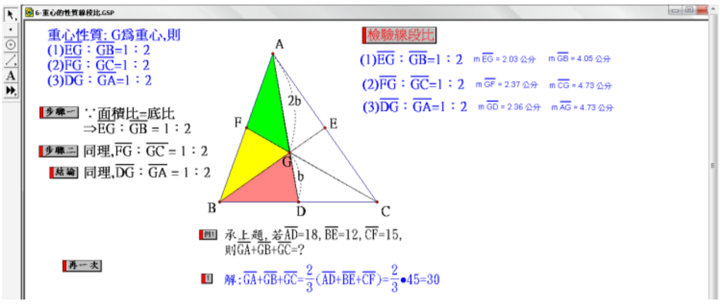


圖 6－18 三角形的重心性質(比例線段)

7. 直角三角形的外心與重心：這個部份是希望學生明白知道直角三角形的外心與重心皆在斜邊的中線上，再利用重心的比例線段性質，依題意解題即可。

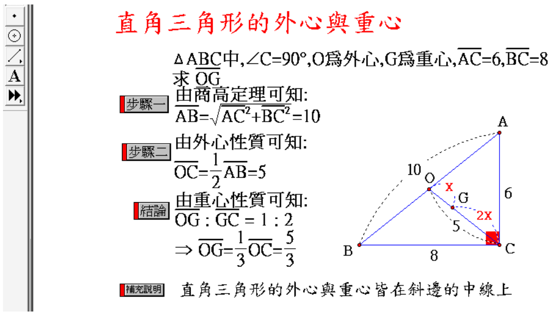


圖 6－19 直角三角形的外心與重心

8. 等腰三角形的重心：這個部分是希望學生可以結合等腰三角形兩腰中線會等長，再利用重心比例線段性質，進而知道△GBC 也是等腰三角形。搭配題目條件，得到△GBC 為等腰直角三角形，最後依題意依序解題即可。

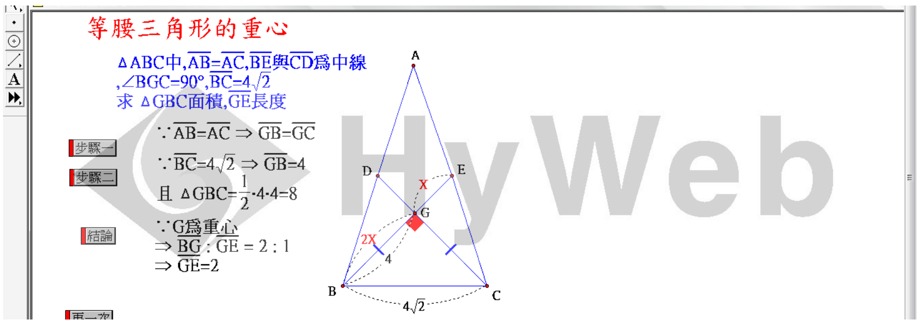


圖 6－20 等腰三角形的重心 (邢維禮、高世良，2004)

9. 平行四邊形結合重心問題 1：這個部分是希望學生可以結合平行四邊形對角線互相平分的特性，搭配題意，便可以得到 $\overline{DO}$ 與 $\overline{AE}$ 為△ADC 兩條中線，這樣便知道 G 為△ADC 的重心，利用 GSP 動態呈現，配合重心的線段比例，我們可以得到此題最後的結論。

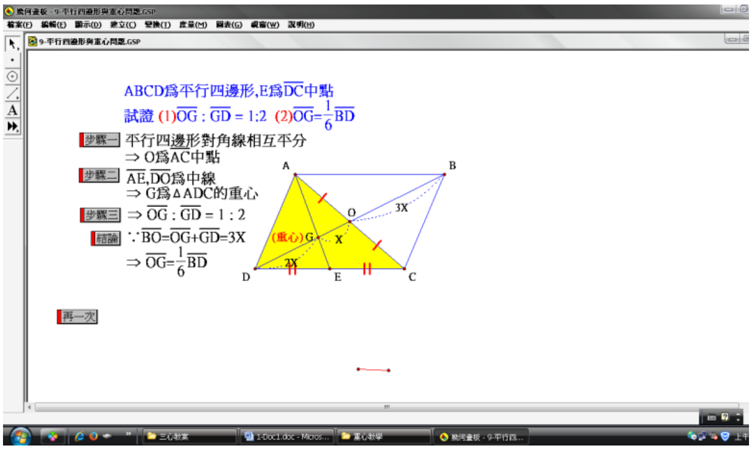


圖 6－21 平行四邊形結合重心問題 1 (邢維禮、高世良，2004)

10. 平行四邊形結合重心問題 2：因為 $\overline{CE}$ 與 $\overline{AF}$ 為△ABC 兩條中線，所以得到 J 為△ABC 的重心，同理得到 I 為△ADC 的重心，根據重心面積比性質，我們可以輕易求出此題答案。

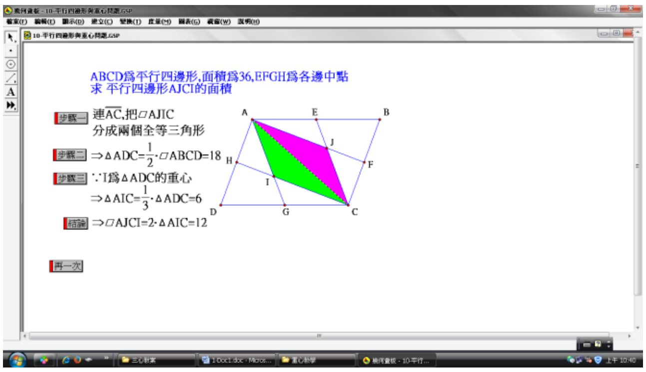


圖 6－22 平行四邊形結合重心問題 2 (邢維禮、高世良，2004)

11. 正三角形的外接圓與內切圓：這個部分是希望學生知道正三角形外心、內心、重心合一。透過 GSP 動態呈現，結合重心線段比例性質，讓學生更容易接受外接圓與內切圓半徑比為 2：1 的事實。

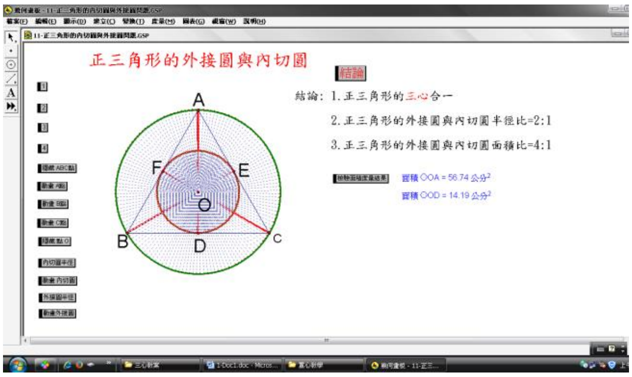


圖 6－23　正三角形的外接圓與內切圓

12. 等腰三角形三心彼此之間的距離：這個部分是希望讓學生知道要解決等腰三角形三心彼此之間的距離問題，可以透過搭橋方式來處理。因為要直接求出 $\overline{OG}$ 長度，除了前面我們提到的直角三角形情況外，知道直角三角形斜邊中線長，就可以求出 $\overline{OG}$ 長度了。但遇到等腰三角形，知道底邊上的高之後，並不能直接求出 $\overline{OG}$ 的長度。我們必須透過外心與重心共用的媒介來協助處理，個別求出 $\overline{OD}$ 與 $\overline{GD}$，便可求出 $\overline{OG}$ 的長度了。若要求出 $\overline{OI}$ 、 $\overline{IG}$ 的長度，我們也可利用類似的策略來處理解決。

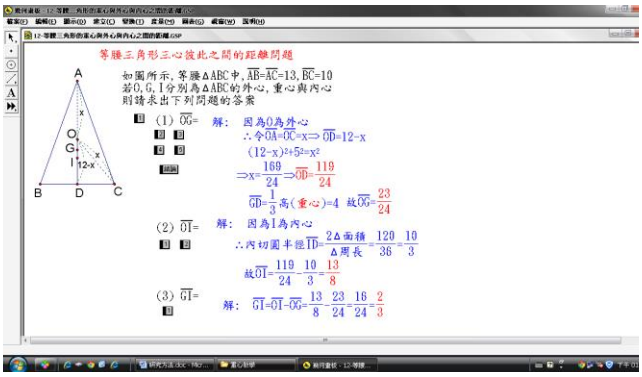


圖 6－24 等腰三角形三心彼此之間的距離

附錄二　　後測試題

一、選擇題(每題各 5 分)

1.( ) 有關三角形三心及其性質，請問下列敘述何者正確？

(A) 三角形三中線將三角形分割成 6 個全等小三角形

(B) 直角三角形的內心一定在斜邊中點

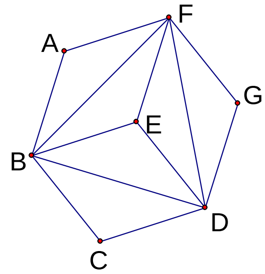
(C) 任意三角形的重心一定在三角形內部

(D) 等腰三角形的外心一定在三角形內部

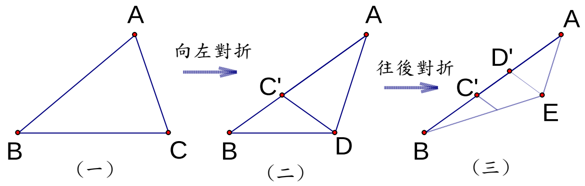
2.( ) 如右圖，在同一平面上，有三個菱形 ABEF、BCDE、DEFG，請問 E 點為△BDF 的哪一種心？

(A)重心 (B)外心

(C)內心 (D)無法判定



3.( ) 小明將下圖(一)向左對折，將 C 點折疊至 C'，形成圖(二)，最後將圖(二)往後對折，將 D 點折疊至 D'，形成圖(三)。請問 E 點是原本△ABC 的______。空格應該填下列哪個選項最為恰當？



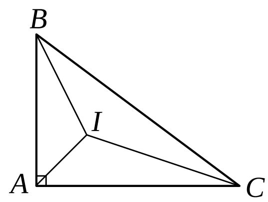
(A) 外心 (B) 內心 (C) 重心 (D) 圓心

4.( ) 右圖△ABC 中，∠BAC＝90°，I 為內心。若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，

則△AIB：△BIC：△AIC＝？

(A) 3：4：5 (B) 3：5：4

(C) 4：3：5 (D) 5：4：3



5.( ) 在坐標平面上，若 A (0 , 8)、B (−6 , 0)、C (6 , 0)，I 為△ABC 的內心，則 I 點坐標為何？

(A) $(0，\frac{8}{3})$ (B) (0，4) (C) (0，3) (D) $(0，\frac{15}{4})$

6.( ) 已知 O 為△ABC 的外心，圓 O 是△ABC 的外接圓，∠ABC＝40°，∠ACB＝46°，則∠BOC＝？

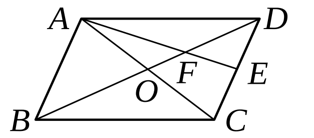
(A) 150° (B) 188°(C) 172°(D) 180°

7.( ) △PQR 中，∠R＝90°，G 為△PQR 的重心，O 為△PQR 的外心。若 $\overline{PR}=18$，$\overline{QR}=24$，則 $\overline{OG}=$？

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

8.（ ）如右圖，▱ABCD 中，E 是 $\overline{CD}$ 中點，$\overline{AE}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 F 點，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，則四邊形 OCEF 面積：△AOB 面積＝？

（A）1：2　（B）2：3　（C）3：4　（D）4：5



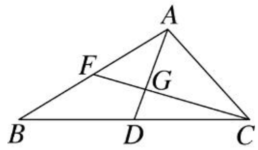
9.（ ）如右圖，△*ABC* 中，$\overline{AB}$＝10，兩中線 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$ 交於 *G*，若 $\overline{AD}$＝6，$\overline{CF}$＝9，則△*ABC* 的面積為多少平方單位？

（A）36　平方單位

（B）40　平方單位

（C）54　平方單位

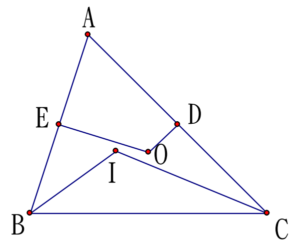
（D）60　平方單位



10.（ ）如右下圖，I 為△ABC 的內心，O 為△ABC 的外心，且 D、E 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點。若∠BIC＝115°，則∠DOE＝？

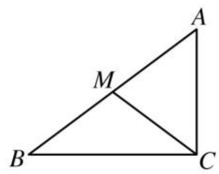
（A）130°　　（B）140°

（C）145°　　（D）155°



二、填充題(每格各 5 分)

1. 如右下圖，△ABC 中，M 為外心，$\overline{AC}$＝6 公分，$\overline{BC}$＝8 公分， 則△MBC 的周長為_______公分。



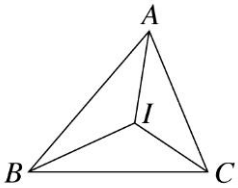
2. △ABC 中，$\overline{AB}$＝5，$\overline{BC}$＝8，$\overline{AC}$＝10，則外心 O 在△ABC 的______。

3. 如下圖(一)所示，I 為△ABC 的內心，且∠*AIC*＝110°，∠*BIC*＝120°，求∠ACB 的度數＝______。

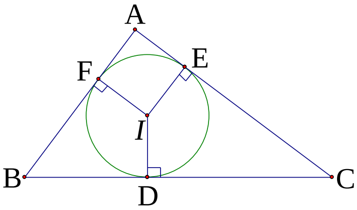
4. 如下圖(二)所示，△ABC 中，$\overline{AC}$＝8，$\overline{BD}$＝4，$\overline{IE}$＝2，圓 I 為△ABC 之內切圓，則△ABC 面積＝ ______平方單位。

5. 在△ABC 中，G 為重心，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 分別是△ABC 的三中線，$\overline{AG}$＝4 公分，$\overline{BG}$＝6 公分，$\overline{CG}$＝8 公分，則 $\overline{AD}$＋$\overline{BE}$＋$\overline{CF}$＝______公分。

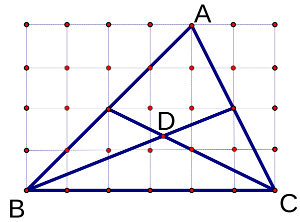
6. 依據下圖(三)的資訊，D 點最有可能是△ABC 的____心。



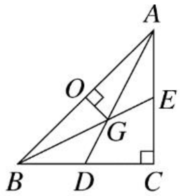
圖(一)



圖(二)



圖(三)



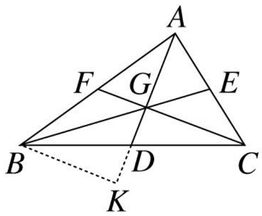
圖(四)

7. 如右上圖(四)所示，等腰直角三角形ABC中，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 均為△ABC的中線，且 $\overline{OG} \perp \overline{AB}$，若 $\overline{OG}=7$，則△ABC面積＝__________平方單位。

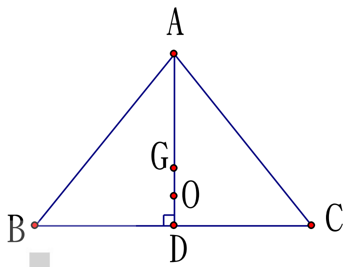
8. 已知△ABC中，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$、$\overline{BC}=24$，，若$O$為△ABC的外心， 則 $\overline{OA}=$______

三、計算題(每題 5 分)

1、如右圖所示，G為△ABC的重心，且A、D、K三點共線，已知 $\overline{AD}=18$公分，$\overline{BE}=30$公分，$\overline{CF}=24$公分，若 $\overline{GD}=\overline{DK}$，則△ABC的面積等於多少？



2、如右圖所示，O為△ABC的外心，G為△ABC的重心，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，且 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$， 則 $\overline{OG}$ 等於多少？



附錄三

對 GSP 融入數學教學態度調查表

個人基本資料 三年_____班　座號：_____　姓名：___________　性別：□男　□女 是否有參加數學課外補習：□是　□否　填卷日期：____年____月____日					
問題項目	非常同意	同意	沒有意見	不同意	非常不同意
1 二年級老師上幾何課程時，就有使用過 GSP 繪圖軟體，之後我利用課餘時間加以研究，對於 GSP 軟體操作已經有一定程度的熟悉了。					
2 透過老師三年級數學課程前補救教學，對於 GSP 繪圖軟體的操作，我在電腦上的操作大致上沒有問題。					
3 透過 GSP 繪圖軟體融入學習課程，我能了解學習單上老師講解的操作步驟。					
4 在操作 GSP 的學習中，螢幕上的呈現方式(例如：圖形的移動、顏色區分、動態呈現等)會加深我對三心問題的印象。					
5 我認為三心問題課程用 GSP 軟體來輔助學習相當適合。					
6 我對電腦的操作較不熟悉，透過電腦來學習三心問題，讓我覺得壓力很大。					
7 透過 GSP 的教學課程，反而讓我無法專心上課。					
8 我覺得透過 GSP 的教學					

課程，可以將課本中的教材，更具體呈現出來，讓我更容易理解課本中的內容。					
9 GSP 融入數學學習的教學模式，對我在數學幾何解題上有很大的幫助。					
10 我認為 GSP 輔助數學學習的課程設計，比較能夠引我的學習動機。					
11 我認為 GSP 的教學課程設計上，根本是多此一舉，毫無意義可言。					
12 我覺得學會操作 GSP 繪圖軟體，可以擴大我的數學視野。					
13 我會想利用 GSP 繪圖軟體，來幫助我完成數學幾何作業。					
14 我會想更進一步學好 GSP 繪圖軟體相關操作，或接觸其他相關繪圖軟體。					

15 你對於使用電腦及 GSP 軟體來學習數學的方式滿意嗎？你覺得如果哪些方面可以改善的話，數學幾何的學習會更有成效？____________________________________

____

____

____