International Journal of Science and Engineering
http://www.scieng.nutn.edu.tw/ch/item.php
International Journal of Science and Engineering (issued by NUTN) VoL.7 No.1(2017)73-116
Doi : 10.6159/IJSE.2017.(7-1).04

A Study of Error Patterns on Equation of Lines in Space for Senior High School Students in Tainan Area

Hung-Li Pan
Dept. of Applied Mathematics, National University of Tainan in Taiwan.

Abstract

This study focused on types of errors high school students may make when learning Equation of Lines in Space, and on what may contribute to these errors, hoping to learn more about students' difficulties in this unit and to provide teachers with some teaching strategies for reference in the future. The study is mainly conducted with quantitative analysis, supplemented by quantitative analysis of interviews, whose interviewees, all second graders, come from a private high school in Tainan city. When in the second year of high school, many students are found falling behind when learning the second unit in book Ⅳ- Equation of Lines in Space. Though students may have the basic concepts of space learned in the previous unit, Vector Space, their knowledge of space remains the same as that of space plane. What's more, not only do students not know how to solve the math problem, but they also figure out the problem in wrong ways. As a results, this study aims to find out the blind spots of students when they encounter this unit, and thus help teachers have the know-how to help students learn this unit as well. Accompanied by some interviews, the study reveals the scenarios in which students have difficulty leaning this unit; furthermore, it creates the possibility to fix students' errors and misconceptions. The results are as follows:

What are the common types of errors in Equation of Lines in Space made by the high school students of Tainan ?

(1)They have vague ideas of the definition of parameter form of linear.

(2)The definition of symmetric form of line is not quite clear to them, so confusions and miscalculations can often be seen.

(3)They don't quite understand the relationship between line and plane：the meaning of line and cross plane and the relationship between the cross product of two vectors and normal vector of plane.

(4)They have no clear conception of the relationship between lines; they are lack of understanding the questions, the characteristics of angle bisector, and the supposed parameter meaning of the linear projection point.

1. The three errors of the unit of linear in space are often made by the high school

students of Tainan：

(1)They are insufficient in understanding the definition.

(2)They make errors transforming the equation of linear.

(3)The applications of parameter form are not familiar to them.

(4)They often make errors in the calculation of the cross product.

(5)They are lack of the idea of three-dimensional space.

2. What are the reasons of making errors in thinking and using the lines in space?

(1)Some students have or lack previous cognition.

(2)They ignore the given conditions.

(3)Forgetfulness, careless calculation and slip of pen are common sights.

(4)They don’t have prudent attitude and correct conception in answering the questions.

(5)Inappropriate analogies and false inference and extend can be found, too.

Index Terms ─Lines in space, Equation of line, Lines and planes relationships.

台南地區高中學生對空間中直線方程式的錯誤類型分析

潘宏澧*
應用數學系碩士班，國立台南大學，台南市，70005，台灣。
*E-mail: glavinpan@gmail.com

摘要

本研究主要探討高中學生在「空間中的直線」單元的錯誤類型與錯誤可能形成之原因，藉此了解學生在此單元的學習困難點，提供教師教學參考。本研究採量的分析為主軸，輔以質性分析晤談，研究對象為台南市某私立中學高中學生 47 人。每年到高二課程時，幾乎會發現的現象便是第四冊第二單元「空間中的直線」的學習狀況有落差，學生雖然在第一單元「空間向量」已建立空間的基本概念，但進入第二單元之後，似乎對空間的認識仍然停留在空間平面的處理。對此單元所碰到的問題，不僅不知道該如何擬定解題，甚至會有錯誤的思考概念，所以本研究希望透過此次的自編測驗了解，一般學生在此單元內容學習上的盲點，進而找出協助教學的方式或是協助學生學習改進方式。研究並輔以晤談，瞭解學生在單元學習的真正錯誤情形並進一步修正學習上的錯誤概念。研究結果如下：

一、台南地區學生在空間中的直線單元之錯誤情形為何？

1. 類型一：「直線的參數式」定義不清楚。
2. 類型二：「直線的對稱比例式」定義不清楚、混淆或計算錯誤。
3. 類型三：「直線和平面的關係」。不清楚直線和平面交點的意義、兩向量的外積概念與平面的法向量關係。
4. 類型四：「直線與直線的關係」。應用問題讀題、角平分線的特徵以及直線投影點的參數假設意義。

二、台南地區高中學生在空間中的直線單元上之錯誤類型有：

1. 定義觀念不熟悉。
2. 參數式的應用不熟悉。
3. 直線的方程式轉換錯誤。
4. 外積運算錯誤。
5. 立體空間的觀念。

三、空間中的直線的概念思考與運用之錯誤原因為何？

1. 先備知識錯誤或不足。
2. 條件忽略、忘記或誤加。
3. 粗心計算或者筆誤。
4. 敷衍應付或解題概念缺乏。

5. 可能有不適當的類化或錯誤的推廣、延伸。

關鍵字：空間中的直線、直線的方程式、直線和平面的關係

1.前言

陳俊廷（2002）提到「空間向量」為高中學生所應具備的數學基本能力之一。尤其近幾年來課程標準修訂之後，空間幾何對高中學生來說一直是一個較陌生且學習不易的概念區塊，然而有效的使用空間向量的代數化演算卻會更容易掌握空間幾何。陳建蒼（2000）研究指出，學生另有概念的主要類型可以發現學生學習困難所在，以及瞭解學生犯錯的可能原因。同時，所得到的診斷資料也可作為設計補救教學時的依據，再者，針對學生的另有概念作也可有效的矯正。然而目前現有的國內外文獻很少有對於高中學生在空間向量學習的描述，本研究便透過對高中學生學習困難的診斷工具，進行瞭解學生學習空間向量的困難所在，並探討造成學生犯錯的形成原因，以提供數學科教師在教學上的參考。使教師能提前做好教學前的準備，亦或教學後的補救，幫助學生改正錯誤型態的原因，矯正迷思概念。數學演習的計算過程所發生錯誤有可能是想法或步驟，其中的想法也可能牽涉學習過程所建立的知識架構。而這些錯誤關鍵處，大約分成數種類型；數學計算式中產生錯誤的步驟，依據其錯誤的關鍵處，又可分成幾種的類型稱為錯誤類型(Kathleen，1987)。

1.1 理論概念發展

1.1.1 理論概念

張春興、林清山（1996）提出 Piaget 的認知發展理論，有兩個基本要義：其一，他認為個體智能的發展也就是個體在環境中生活適應的歷程。其二，智能上的發展並非只是知識上數量的增長，而是在智能行為上品質的改變。根據結構的演變，Piaget 將智能發展分為感覺動作期（sensorimotor stage）、運思預備期（preoperational stage）、具體操作期（concrete operation stage）、形式操作期（formal operation stage）四個主要時期。瞭解智能的演化過程，也得以適當調整在學生每個階段的思考模式，協助其正確的思維方向。

1.1.2 問題解決

錯誤常發生於學生為解題而自行延伸的處理方式，因而產生概念連結上錯誤、讀題轉譯的錯誤、問題整合的錯誤、計算上錯誤或是解題執行上的錯誤等等。所以在教學過程中，教學者必須時時注意學生的解題過程，因為從學生的解題過程中可以發掘出錯誤概念的地方有哪些，進而適當地引導或是實施補救教學，讓學生從錯誤中建立正確概念。從錯誤中有效的學習，是學習數學過程中一個很重要的方法。學習數學的過程中沒有發生錯誤，是不可能的，犯錯本是必經之階段。所以教師如果可以在教學過程中，深入了解學生的錯誤類型有哪些，並將題目的錯誤類型有效地分類以及統籌，相信對學習者而言，一定可以提供最大的幫助與效益，而且一定樂在學習當中。

以數學本身的知識架構而言，學習新的知識通常需要具有舊知識與經驗當基礎。讓學習者認知結構先對新的知識產生同化，同化即成為學習者本身的知識架構中的一環。但如果同化的過程當中，因為概念不清楚就可能導致干擾學習者本身的情形，例如：誤用內積與外積的定義與計算。Lester(1985)的六個解題歷程應用在數學解題過中可以發現，學生解題可能產生的錯誤情形有哪些?例如：讀題錯誤或是擬題(解題錯誤)等等情形。本研究就是即時希望了解學生在「空間中的直線」單元當中，所產生的錯誤情形有哪些?進而分析整理錯誤類型。若是讀題錯誤，則所造成讀題錯誤問題是語意或是其他情形呢?若是擬題錯誤，則分析學生解題的錯誤情形是否是先備知識不足或是計算能力不足。

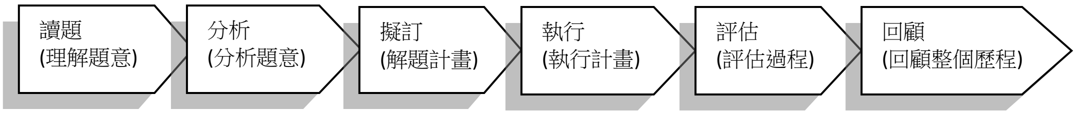


圖 1.1.2-1 解題歷程步驟表(Ki1patrick, J.(1967))

1.1.3 錯誤類型

一般而言錯誤有可能包含：錯誤概念的形成以及錯誤的運算規則。以前者而言，有可能日常生活經驗累積，或是學習過程未能清楚了解所造成。但如果能從錯誤中分析，不管對學習者學習或是教授者都是有幫助(Ashlock, 1990）。而錯誤的運算規則，學生在計算過程中通常不知道自己使用了錯誤的計算過程，雖然有時候懷疑自己答案有問題，但卻不知如何著手去檢查。Mayer（1985）將學生解題錯誤分成三類：

(1)遺漏的錯誤（omission error）：是對命題不能完整回憶的結果。

(2)細節的錯誤（specification error）：指在陳述句中，一個變數轉換成另一變數的能力不夠所致，如公升要改成公合。

(3)轉換的錯誤（conversion error）：即無法將關係句的型式，轉換成陳述句。

學生錯誤產生的原因可能會有：缺乏先備知識、缺乏概念或概念不正確、誤用資料或閱讀困難、新知識與舊經驗作錯誤的聯結或類推、不合邏輯的推理、憑直覺或關鍵字作反應、計算錯誤、老師教學影響、無法將概念與運算聯繫。預先了解學生可能發生錯誤的原因，可以幫助在研究中對學生真正錯誤原因的發現具有參考的方向，也更能發現學生錯誤產生的真正原因。

1.2 空間向量教材

在 99 課綱中，第四冊一開始首先介紹空間中的線、面及其相互關係，如垂直、平行與相交。此部分作個簡單的概念性介紹。其次介紹空間中直角坐標系以及距離公式。距離公式是三維空間的畢氏定理，也是空間幾何的基石。空間中兩向量的內積是其夾角的餘弦在直角坐標系下的表現，具雙線性與交換性。內積的應用包括兩向量的直交化（正射影、高、柯西不等式）、平面的法向量、兩平面的夾角、點與面的距離、以及兩向量垂直的判定。空間中兩向量的外積是其夾角的正弦以及公垂向量在直角坐標系下的代數

表現，具雙線性與反對稱性。外積的主要應用包括，計算兩向量所張出的平行四邊形的面積、求兩向量所張出的平面方程式、以及求兩歪斜線的距離。

2.材料與方法 Material and methods

本研究主要目的在探討高中二年級學生在學習 99 課綱「空間中的直線」單元之學習表現概況，並歸納整理學生在該單元的可能類型，並透過進一步訪談整理出學生可能錯誤的原因。研究者希望透過自編的「單元測驗」及半結構式晤談方式，蒐集整理出目前高中學生學習空間這個單元所產生的相關學習障礙資料，從而進一步了解其思考與想法，做為未來研究與教學改善的參考。

2.1 研究設計

本研究對象為高二自然組一班級，學生共計 47 位。其中男生計 35 位，女生計 12 位。施測時間為一堂課授課時間，計 12 題共 50 分鐘。正式施測測驗實施完畢之後，針對其中較具有代表性的解題錯誤、常見錯誤類型以及表達能力等因素從高分群與低分群中選取適當學生進行晤談。Kelly(1939)提出，在常態分配下，最適當的比率是高分組與低分組各佔 27%；而一般的測驗與評量中，高分組與低分組只要介於 25%至 33%均可，若是標準化測驗，習慣上仍採用 27%作為高、低組別分組的標準(吳裕益、陳英豪，1991)。本研究實際參與人數為 47 人，依照比例高分群選取 16 位，低分群也選取 16 位，進行進一步資料分析。

2.2 研究對象

本研究最主要是針對目前 99 課綱中高二下第四冊第二章「空間中的直線」學習內容，因此研究探討的對象是以高二學生為主要研究對象，並分別為預試階段、正式施測階段、晤談階段等三個階段，其選取方式與人數說明如下：

2.2.1 預試階段

首先以高三自然組準備參加學力測驗的五位同學以初步擬題之題目測試。測試完畢先行與資深教職同仁討論並修正試題，緊再接著排高二社會組一個班級先行預試，考驗測量的可行性。經過測試之後，形成具評量性質的正式施測試題。

2.2.2 正式施測階段

研究者挑選出所任教學學校高二自然組一班級，學生共計 47 位。其中男生計 35 位，女生計 12 位。施測時間為一堂課授課時間，計 50 分鐘。

2.2.3 晤談階段

本研究正式施測測驗實施完畢之後，針對其中較具有代表性的解題錯誤、常見錯誤類型以及表達能力等因素從高分群與低分群中選取適當學生進行晤。Kelly(1939)提出，在常態分配下，最適當的比率是高分組與低分組各佔 27%；而一般的測驗與評量中，高分組與低分組只要介於 25%至 33%均可，若是標準化測驗，習慣上仍採用 27%作為高、

低組別分組的標準(吳裕益、陳英豪，1991)。本研究參與人數為 47 人，依照比例高分群選取 16 位，低分群也選取 16 位，各佔 33%符合標準。

尤其讓研究者頗覺得意外的部分題型，進行一對一的晤談並進行記錄。由晤談紀錄可以發現原先研究者認為可能的問題，並不一定是學習者真正問題，例如：第一題為基礎題，研究者認為不應該有空白，但卻出現空白情形，所以需利用晤談得知。

2.3 研究工具

2.3.1 自編之單元測驗

本研究所建立自編之單元測驗，是先由研究者依據 99 課綱內容所述建立題目。接著與學校教職同仁及指導教授討論出適合題型，然後請 5 位高三學生先行測試，測試結果與資深教職同仁再次討論題目，再行增刪題目作為預試。預試取高三社會組一班做為測試，預試完結果，再利用「SPSS 21.0」統計軟體與「Excel 2013」試算表進行難度、鑑別度等統計分析，發覺仍未達到 0.75 以上，因此仍需改進題目。針對比較有爭議的題目，再次與資深同事再行題目討論，形成最後試題。其中第一題、第二題與第三題的難易度係數偏高，鑑別度過低，原本依照理論必須捨棄，但是學校資深同仁一致認為，一份測驗卷仍必須有基本題型存在之必要，除了瞭解學生基礎學習過程是否未建立，亦可讓學生在作答過程中，認真作答給與實質的回饋，故此三題給予保留，但在後面以「SPSS 21.0」軟體分析時先予以剔除，以免影響整體的信效度。

表 2.3.1-1 直線方程式的學習目標

1. 給定空間中一點及方向向量，能夠參數式寫出通過此點的參數式。
2. 能夠用對稱比例式表示空間中的直線。
3. 能夠求算兩平面的交線，並寫出此線的參數式。

資料來源：教育部高中數學學科中心

表 2.3.1-2 空間中直線關係的學習目標

1. 能夠判定空間中兩直線的關係。
2. 空間中兩直線若有交點，能夠求算出交點坐標。
3. 能夠求算空間中兩平行線的距離。
4. 能夠求算空間中兩歪斜線的距離。

資料來源：教育部高中數學學科中心

研究上試題鑑別度分析如達 .35 以上則為極佳試題，若介於 .3 到 .4 之間為良好試題，但可能需要修改(Ebel & Frisble, 1991)；試題難度最好能選擇難易適中介於 .4 到 .7 或 .8 之間，偵測學習困難時選用容易的試題，甄選優秀人才時就需要選用難度較高的試題。本單元自編測驗中，題號一至題號三為基本試題，雖然鑑別度未達標準，但與資深同仁及指導老師討論過後仍決定予以保留。DeVellis(1991)、Nunnally(1978) 提出.70 以上是可接受最小信度值本研究資料經過「SPSS 21.0」版運算統計後得到 Cronbach's

Alpha 值=0.747，符合標準予以採用。

表 2.3.1-3 單元測驗雙向細目表

主題	學習目標	認知層次：知識	認知層次：理解	認知層次：應用	合計題數
直線的參數式	直線的參數式寫法		Q1		1
直線的對稱比例式	直線的對稱比例式寫法		Q2 Q3		2
直線和平面的關係	能判定空間中直線與平面之間的關係			Q4	1
	當平面與直線相交於一點時 能求出直線與平面的交點			Q5 Q6	2
	能求出通過直線與直線外一點的平面方程式			Q7	1
直線與直線的關係	能判定空間中兩直線的相交情形		Q10		1
	當兩直線相交於一點時，能 求出它們的交點			Q8	1
	能求出空間中點到直線的距離			Q9	1
	兩平行線的距離		Q11		1
	兩歪線的距離			Q12	1
題目合計總數			5	7	12

2.3.2 預試與修改

(1)實施目的：先行確立本研究所需正式施測試卷可行性。
(2)實施對象：台南市某私立中學高二學生，班級數：1 班，人數：47。
(3)施測方式：採統一集體施測方式。
(4)施測日期：104 年 3 月。
(5)施測時間：數學課一堂，共計 50 分鐘。
(6)測驗分析：

I. 試卷回收，以「Excel 2013」軟體計算每一題難度與鑑別度，如表 2.3.2-2 所示。

II.難度分析：

將受試學生以答對該題得 1 分，答錯則 0 分，換算總得分，並依照總分高低排序，共取全體樣本數 48 位，由最高分向下序排列，取 27%為高分組。再由最低分往上取 27%為低分組，利用難度指標 $P=\frac{P_H+P_L}{2}$ ，計算出各試題難度，如下表表 2.3.2-2。

試題的難度(P)被定義為全體受試者答對或通過該題的百分比 (percentage passing)， $p=\frac{R}{n}\times 100\%$ ，R=通過該題的人數，n=全體人數。從定義來看，所謂試題的難度可視為試題的容易度(item easiness)，因為 p 愈大表示試題愈容易。對某些測驗而言，並非用通不通過 (答對或答錯)來計分，而是以有或沒有(存在或不存在)某項特質為依據，因此對這類測驗，試題的難度即等於全體受試者擁有該特質的比例。

依受試者總分高低排列，各取得分最高及得分最低的 27%受試者，P_H 表示高分組通過某題人數百分比；P_L 表示低分組通過該題人數百分比，則試題難度(p)等於 $p=\frac{P_H+P_L}{2}$ 。為何取 27%高、低分組為標準呢?這是因為當受試者總測驗分數的分配是常態時，取上下各 27% 的受試者會產生最好的 p 估計值。通常我們可取上下各 10%到 33%之間的受試者來計算 P 值。更進一步的考慮到試題的類型及試題間相關性等因素，我們最好選取試題的難度範圍是在 0.3 到 0.7 之間。

III.鑑別度分析：

是檢驗個別試題與整個測驗的一致性。一個有鑑別度的試題應該與整個測驗的走向是一致的，也就是說測驗分數高的受試者要比測驗分數低的受試者有較高的可能答對某題目，否則此題目並不能反應出受試者的實力，因此並非是個良好的題目。我們可用下列方法求試題鑑別度(D)，鑑別度 $D=P_H-P_L$ ，這種方法是比較高、低分組的受試者在個別試題上通過人數的百分比，D 愈大表示試題愈能鑑別出高、低分組的受試者，並且個別試題與測驗總分的一致性愈高。下表是依照鑑別度 D 的大小來選取試題的簡單原則：

表 2.3.2-1 鑑別度範圍表

鑑別度範圍	說明
$D \geq 0.40$	此題非常優良
$0.30 \leq D \leq 0.39$	此題良好，修改更佳
$0.20 \leq D \leq 0.29$	此題尚可，仍需修改

$D \leq 0.19$	此題不良，必需修改

前三題的題目屬於基本能力的檢測，所以鑑別度較低，但從第四題開始鑑別度便顯著提升。參照上表可以得知，所選擇題目具有很好的鑑別度，另外再加上專家效度(包含多位資深教職同仁與指導教授共同審閱)，故此份單元自編測驗具有好的參考價值。

表 2.3.2-2 試題難易度與鑑別度

題號	類型	難易度 (P)	鑑別度 (D)
1	類型一：直線的參數式	0.97	0.06
2	類型二：直線的對稱比例式	0.94	0.13
3	類型三：直線和平面的關係	0.94	0.13
4	類型三：直線和平面的關係	0.75	0.38
5	類型三：直線和平面的關係	0.47	0.56
6	類型三：直線和平面的關係	0.31	0.63
7	類型三：直線和平面的關係	0.66	0.69
8	類型四：直線與直線的關係	0.25	0.50
9	類型四：直線與直線的關係	0.41	0.56
10	類型四：直線與直線的關係	0.28	0.56
11	類型四：直線與直線的關係	0.53	0.81
12	類型四：直線與直線的關係	0.25	0.38

2.3.3 半結構式晤談

試卷回收整理完，並將試題一一計算出各試題難度與鑑別度，緊接著將所有回收試卷依照總分排列，由高分往下排列，分別找出高分群與低分群中具代表性之試卷，開始約談書寫試卷之學生，找出各問題的錯誤情形與錯誤類型為何。研究者透過資料的整理與蒐集，歸納出幾個晤談問題，從中了解學習者在此單元學習的一般狀況下，所遇到的錯誤類型與情形，並且導引學習者建立新的且正確知識架構。

表 2.3.3-1 晤談問題表

晤談問題階段	晤談問題
1.了解題意(讀題)	你對這一題的題目可以以解釋或是畫圖說明嗎？
2.擬訂計畫	你可以說明這一題需要用到哪些觀念？
3.實行計畫	你可以每一步說明你的思考步驟嗎？
4.回顧	老師的說明你可以了解嗎?可以自己再次說明嗎？

3.理論/計算 Theory/calculation

3.1 蒐集資料

首先蒐集國內外相關文獻分析內容，並參酌教育部所公布 99 年高中數學課綱中所述之內容，以及坊間各版本課本、習作與講義，再與學校資深同仁及指導教授討論後選取 12 題作為預試試題。

3.2 編製相關施測工具

研究者所自編之「空間中的直線」單元測驗，內容係依照數學學習過程所需要之課訂目標所建立之試題，在此過程中，研究者先行從課本內容、習題、習作簿與課堂講義中了解此單元的學習架構、學習目標。首先先建立難度介於中間與中間偏難的試題共 10 題左右，再與學校資深同仁商討，確立難度必須修正至中間偏易與中間偏難。接著給予預試者 5 位高二學習者先行預試，然後收回並與資深同仁討論修正，其中這五位受試者是利用資深同仁的班級學生隨機測試。測試結果，學校同仁建議，一份題目必須由淺入深，並且可以明確協助教授者了解學習者的學習狀況，所以，重新將題目排列，由淺如深，並且淘汰不適任之題目，重新選擇適當題目，以符合測試目標。

3.3 進行預試

首先研究者參酌 99 課綱高二下學期第二章「空間中的直線」單元課本、坊間講義等列出四大題型內容，初步設計 12 題。先選擇高三自然組一班 5 位同學參與，其中這五位同學由一位學校資深老師協助挑選，包含成績在班上較前段的同學 1 位，成績中段同學 2 位，以及成績較後段同學 2 位。

3.4 試題修正

將 5 位同學試題卷收回之後，發覺題目的難易度分配不適當。第一，未考慮基本題型，以為學生基本能力具備，但試卷收回發現後段同學空白處甚多。與資深同仁討論之後決定重新擬題並將題目內容分得更細，明確了解每一小主題學習成就，再重新完成 12 題，選擇高二社會組一班共 30 位同學進行預試。試卷回收之後，研究者發現，有了基本題型時，學生較願意去寫，老師也可以檢視學習者的基本能力與知識是否具備。將試

卷回收整理之後再與資深同仁 2 位及教授討論，將試題中題意不清且容易造成學生解題錯誤的試題剔除，並選擇出容易瞭解與判讀學生學習情形的試題，加以重新配置之後又形成 12 題，成為正式施測之試題。

3.5 正式施測

正式施測時為避免其他情形介入使得測驗造成影響，因此本單元測驗儘量以一般測驗卷的形式呈現，讓受試者認為是在一般測驗下完成。施測選擇研究者所任教班級自然組一班，班上同學共有 48 位，但其中一位的學習情況不佳，為避免影響此次所探討情形，在與教授和同仁們討論之後決定移除，因此男生有 35 位，女生有 12 位參與正式施測，施測時間是下午三點二十開始，使用一堂課計 50 分鐘時間。施測完畢之後，研究者先行批改，每題得分 1 分，共 12 題，滿分 12 分。其中書寫處空白視為錯誤，除了以 0 分計，並註明空白，以利後續資料探討與晤談。

3.6 晤談

正式施測完畢之後，研究者級第一時間將資料做初步整理，包含高分群與低分群的選擇。研究者於第三天開始晤談，原因是資料整理須花費許多時間，並且要將題目空白與其他錯誤型態加以區分，以利後續晤談。晤談的選擇也是先加以分類，再分別選取高中低三群學生，並以學生參與晤談意願為主，較特殊書寫原因者為輔(如：基本題卻空白者)。期望晤談時可以深入了解學習差異性，以及學習者背後真正的學習失敗原因為何。

3.7 整理分析

整理分析是一份繁雜的工作，其中包含個人作法批改，輸出入資料排序以及整理。研究者首先將試卷整理批改，採每題 1 分，但是空白部分為了和一般錯誤區分，因此，登錄資料時將一般錯誤視為 0 分，但是空白的試題則登載為 00 分。依據標準首先將這些資料分佈類型作一統計分析，並區分空白與書寫錯誤等情況，以期達到研究的真正目的。此研究除了數據分析出學習者學習的情形，並輔以半結構性晤談，可彌補其中無法用數據所量化的資料，尤其是針對上述空白試題的情形。例如：學習者先書寫困難題，結果反而前面基本題目無法答對的情況，便可以加以註解之後透過晤談了解實際情形。經過「EXCEL 2013」與「SPSS 21.0」兩軟體計算，可以得知難度與鑑別度，並進而求取效度。經過輛的解析後，開始晤談的資料蒐集，晤談採取的方式以分群中自願者和研究者註解之空白試題為主，晤談之後必須先行整理，將內容打成文字並仔細分析其內容。少數學習者開始不太願意接受此次晤談，但後來發覺晤談其實可以類似一對一的學習活動，教授者可以清楚知道此單元的思考模式是否建立，學習者也很高興可以真正了解單元學習內容。

3.8 實施步驟流程

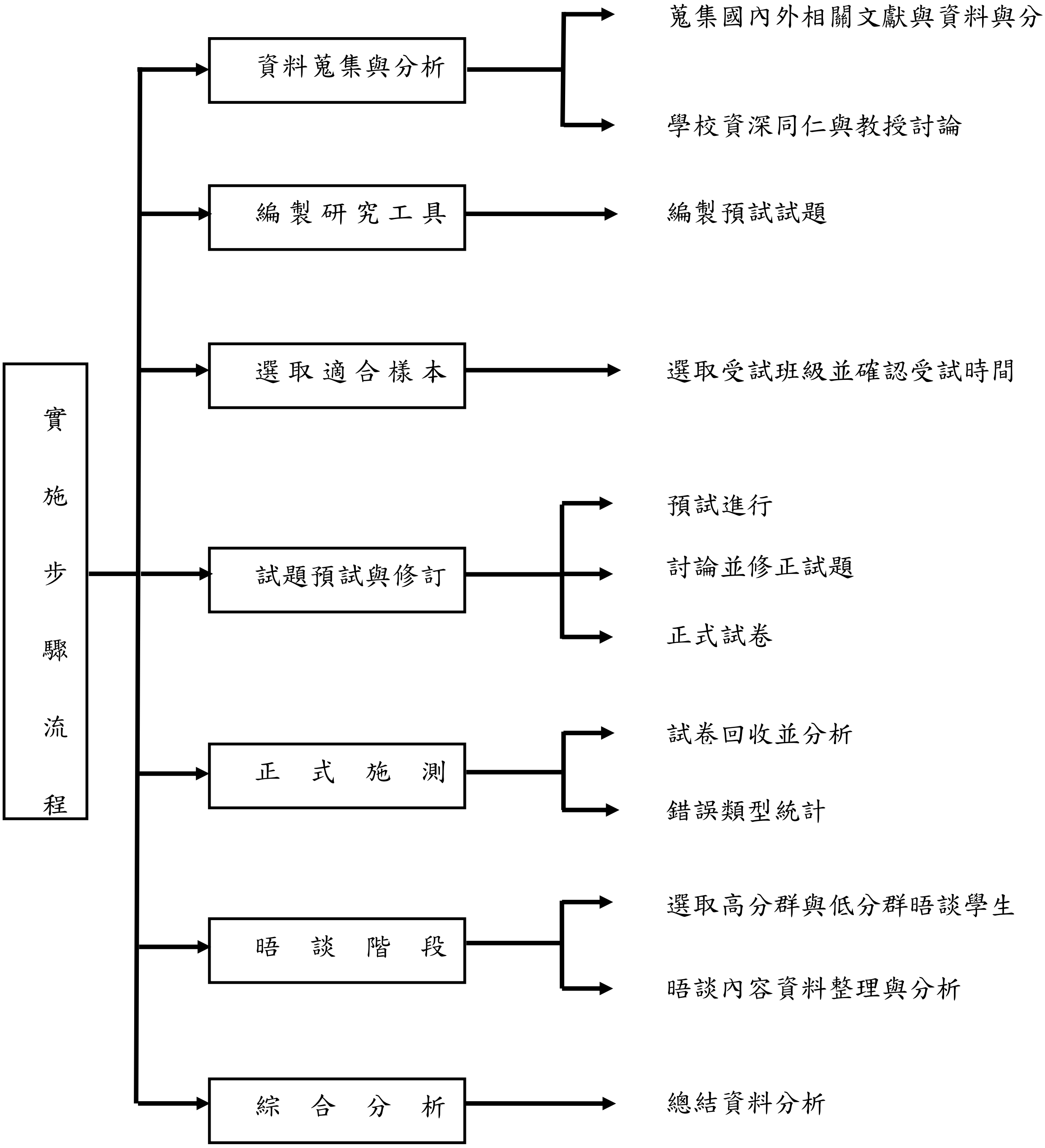


圖 3.8.1-1 本研究流程圖

4.結果 Results

4.1「空間中的直線」單元之結果分析

本自編測驗的測驗內容為高二課程第四冊第二章「空間中的直線」單元學生學習的情形，其中測驗題數共計 12 題，每題 1 分，總分 12 分。將問卷資料經過整理、歸納後，統計出各題答對題數之人數、比例、答對總數、錯誤總數、錯誤人數、空白人數與其比例，學生在此自編測驗的答題情形請見表 4.1.1-1 與表 4.1.2.1-1。

4.1.1 答對題數與分布情形表

受試者答對題數與分佈情形如表 4-1-1。整份測驗共 12 題，整體答對率為 51.42%，整體錯誤率為 48.58%，其中答對 6 題以下(含 6 題)的比例為 51.06%，並不算太高，但扣除基本題而言，仍可發現學習者在此單元學習上的確有探討學習之必要。

表 4.1.1-1 答對題數與分布情形表

答對題數	人數	累計人數	比例(%)	累積比例(%)
1	0	0	0.00	0.00
2	1	1	2.13	2.13
3	6	7	12.77	14.89
4	2	9	4.26	19.15
5	5	14	10.64	29.79
6	10	24	21.28	51.06
7	6	30	12.77	63.83
8	6	36	12.77	76.60
9	4	40	8.51	85.11
10	4	44	8.51	93.62
11	1	45	2.13	95.74
12	2	47	4.26	100.00
整體答對率(%)	51.42		整體錯誤率(%)	48.58

註：(1) $整體答對率(\%)=\dfrac{總答對題數}{全部題數}\times 100\%$

(2) $整體錯誤率(\%)=\dfrac{總錯誤題數}{全部題數}\times 100\%$

上表為受試者答對題數與分布情形，受試者答對的題數從 2 至 12 題，其中整體答對率為 51.42%，整體錯誤率為 48.58%。

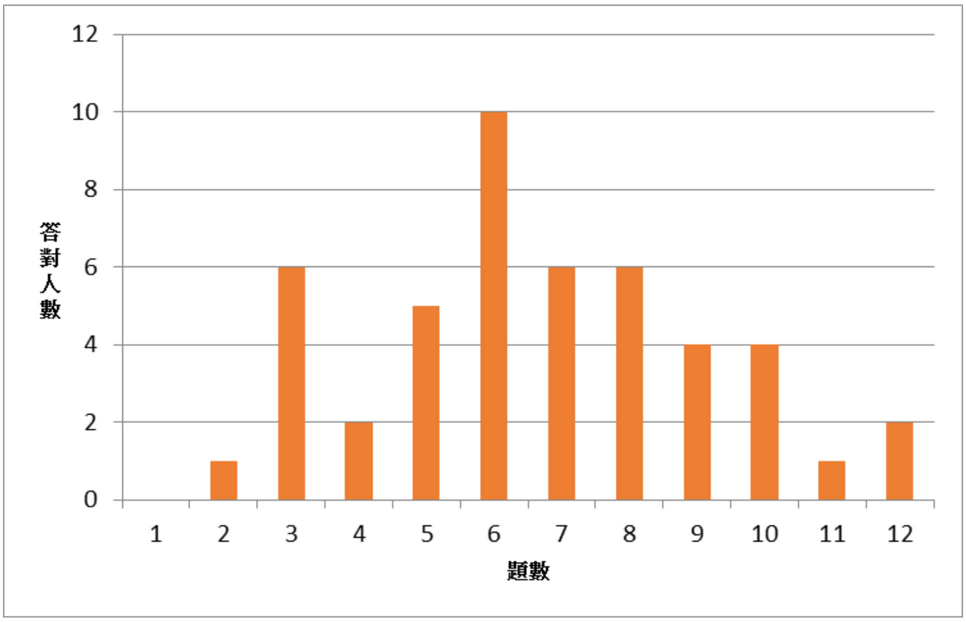


圖 4.1.1-1 答對題數人數分布圖

由上表發現大部分的同學的程度介於中間，而且對於題目的理解適當，因此整體答對率 51.42%，再比對答對題數人數分布圖得知，答對 6~8 題的人數最多。

4.1.2 各題答題情形與解題策略

4.1.2.1 各試題答題情形

將施測者之受測試卷經過整理歸納後，統計出各試題錯誤過程人數(不含空白人數)、空白人數及所佔比例。受試者在「空間中的直線」單元答題情形如表 4.1.2.1-1

表 4.1.2.1-1 自編單元測驗各題答題情形表

題號	答對人數	答對率(%)	錯誤人數	答錯率(%)	列出過程錯誤人數	列出過程錯誤人數比例(%)	空白人數	空白率(%)
1	46	97.9	1	2.13	0	0	1	100
2	43	91.5	3	6.38	2	66.67	1	33.33
3	46	97.9	3	6.38	3	100	0	0
4	38	80.9	9	19.15	9	100	0	0
5	21	44.7	26	65.85	20	76.92	6	23.07
6	14	29.8	33	72.34	17	51.52	16	48.48
7	35	74.5	12	27.66	5	41.67	7	58.33

8	12	25.5	35	76.60	16	45.71	19	54.29
9	20	42.6	27	65.85	9	33.33	18	66.67
10	10	21.3	37	82.98	17	45.95	20	54.05
11	22	46.8	25	53.19	15	60.00	10	40.00
12	8	17.0	39	82.97	16	41.03	23	58.97

註：錯誤人數=列出錯誤過程人數+空白人數

$$\text{答錯率}(\%)=\frac{\text{錯誤人數}}{\text{全部人數}}\times 100\%$$

$$\text{列出錯誤過程人數的比例}(\%)=\frac{\text{列出過程錯誤人數}}{\text{錯誤人數}}\times 100\%$$

$$\text{空白人數比例}(\%)=\frac{\text{空白人數}}{\text{錯誤人數}}\times 100\%$$

由「自編單元測驗各題答題情形表」可以知道第 6 題答對率下降，可能題目難度明顯增加。第 8 題答對人數也下降，有可能是應用問題關係，學習者未能清楚了解題意。第 10 題則是將兩平面的交線換成對稱比例式，應用難度提升。至於第 12 題的解題觀念，最為複雜，因為空間的直線最常見也最難處理的情形便是兩直線「歪斜」的情形，其解題的計算複雜度也最高，因此不難想像答對率偏低，但仍有 17%的答對率。另外，第 5 題發現答對率下降，原因是題目的回答有四個小題，造成學生運算錯誤機率升高，若以小題設計應該可以更清楚呈現每個部分的錯誤情形。至於第 9 題書寫錯誤的比率降低，但空白比率提升，原因是此題所需要具有的相關知識架構較複雜，學習者除了一般空間的概念之外，尚且要了解此題的解題方向，必須第一步先了解參數式應用在投影點的解題概念，所以相較之下，此題空白比率上升。

4.1.2.2 受試者的解題情形

表 4.1.2.2-1 受試者的錯誤情形分布表

	0% | 15%	15% | 30%	30% | 45%	45% | 60%	60% | 75%	75% | 90%
0%~20%	**Q3**	**Q4**				
20%~40%	**Q2**				**Q5**	
40%~60%		**Q7**		**Q11**	**Q6**	**Q8 Q10 Q12**
60%~80%					**Q9**	
80%~100%	**Q1**					

上表為受試者錯誤情形分布表，其中 Q1 的情形較特殊，會經過晤談了解。而 Q9 則是題目難度較高，其餘大部分試題皆符合研究者所希望了解的情形。而此份自編試題也可以從此分布表中了解每一細項的學習小單元，學生學習的困難點在哪裡?教授者就可以在此該單元授課時加以加強或是改變教法，以利學習者學習，避免學習者產生厭惡學習。

表 4.1.2.2-2 受試者的錯誤情形分析表

	低 ←-------- 錯誤率 --------→ 高	
低 ↑ 空	越往左上方： 代表此類題目越不會困擾學生，而且興趣越來越高，所以學生犯錯誤之原因，實屬學生個人錯誤居多。	越往右上方: 代表此類題目學生的迷失概念 越來越多，且興趣也越來越高， 此類題目提供最多錯誤類型及 原因可供分析。
白 率 ↓ 高	越往左下方: 代表此類題目學生越容易上手，但空白率也越來越高，顯示完全沒有概念的學生所犯錯誤個數比率越來越高。	越往右下方: 代表此類題目就學生而言，越來越艱難而且完全沒有概念的也 越來越多，顯示學生較容易放棄且與舊經驗較難連結。

資料來源：吳崇瑋(2014)。台中地區某高中高一學生機率單元解題之錯誤類型分析研究。

由以上圖表得知，剔除前三題基本題目之後，當答錯率升高，空白比率也明顯提高。再對照題目得知，學生在類型四「直線與直線的關係」的題目較為不熟悉。尤其一開始下筆解題的初步，似乎不清楚該如何擬定解題步驟，加上類型四解題所需具有的解題觀念較為複雜，所以造成空白比率也顯著提升。至於類型三「直線和平面的關係」之題目，空白比率經過比較得知較為平均，顯示出直線和平面的題目解題並非完全沒有概念，有些錯誤高可能是還不完全熟悉或是某些解題流程出錯誤，若要進一步分析，則需要採取晤談方式。最後，透過晤談也發現，類型三錯誤的同學，並非完全不會，只是解題過程中有少部分觀念不是很清楚，因而造成錯誤，其中少數是因為沒有把握因此採取放棄策略，所以有空白情況增多之情形。整體而言，此次的實驗在題目上的選擇難度要比起課本所包含的學習範圍略廣，尤其是類型四的題目，必須要具有對空間的概念，並且善用

空間直線的解題策略，例如：空間直線的方向向量與法向量、投影點與參數式等等。另外題目一為基本題目，資深同仁建議必須保留，其目的是為了提升作答意願，為何會產生空白，此時就需靠晤談了解得知。

4.2「空間中的直線」單元之錯誤類型

本研究將此單元分為四大類型，依次分為：

・類型一：直線的參數式

題號	錯誤人數	比例(%)	列出過程錯誤人數	比例(%)	空白人數	比例(%)
1	1	2.13	0	0	1	100

・類型二：直線的對稱比例式

題號	錯誤人數	比例(%)	列出過程錯誤人數	比例(%)	空白人數	比例(%)
2	3	6.38	2	66.67	1	33.33

・類型三：直線和平面的關係

題號	錯誤人數	比例(%)	列出過程錯誤人數	比例(%)	空白人數	比例(%)
3	3	6.38	3	100	0	0
4	9	19.15	9	100	0	0
5	26	65.85	20	76.92	6	23.07
6	33	72.34	17	51.52	16	48.48
7	12	27.66	5	41.67	7	58.33

・類型四：直線與直線的關係

題號	錯誤人數	比例(%)	列出過程錯誤人數	比例(%)	空白人數	比例(%)
8	35	76.60	16	45.71	19	54.29
9	27	65.85	9	33.33	18	66.67
10	37	82.98	17	45.95	20	54.05
11	25	53.19	15	60.00	10	40.00
12	39	82.97	16	41.03	23	58.97

這四大類型是依據目前課綱的內容所區分，研究者也依此內容邊此自編測驗之試題，再依照解題過程所需要之解題概念細分如表 4.2.1-1：

表 4.2.1-1 解題概念表

主題類型	錯誤概念	錯誤人數	空白比率
類型一：(Q1) 直線的參數式	參數式定義不清楚	1	2.0%
	參數式定義混淆	0	0.0%
類型二：(Q2) 直線的對稱比例式	對稱比例式定義不清楚	1	2.0%
	對稱比例式定義混淆	2	2.0%
	計算錯誤	3	2.0%
類型三：(Q3~Q7) 直線和平面的關係	直線用參數式表示的意義	9	6.0%
	直線和平面交點的意義	21	14.0%
	直線的對稱比例式找出直線方向向量	6	4.0%
	兩向量的外積概念與平面的法向量關係	34	23.0%
	利用點法式寫出平面方程式	13	8.7%
類型四：(Q8~Q12) 直線與直線的關係	應用問題讀題(兩直線交於一點)	35	57.1%
	空間中一點到直線的距離	27	70.3%
	空間中兩平面的交線表示	37	56.8%
	空間中兩平行直線的距離	25	44.0%
	空間中兩歪斜直線的距離	39	61.5%

4.3「空間中的直線」單元之錯誤形成的可能原因

本節所探討的是此單元測驗當中，所包含許多空間知識架構以及學生思考的過程當中，每一類型中錯誤概念為何，並輔以半結構晤談時所發現問題。研究者在教學過程一直認為直式的教學可以正確的引導學生的學習，透過此研究發現，雖然學生在學習過程中，會接受老師在課堂所使用教材累積的知識架構，但是每人的認知架構不同，加上對題目的解碼不同，因此，解題歷程也有所不同。同時解題的歷程失敗與否所建立的解題模型，也是下一次解題所思索的方向，但若一開始的解題歷程有錯誤，可能會將錯誤不斷地累積，甚至將錯就錯。是故，若能在教學過程中發現學習者在建立解題模型所積累的錯誤學習，並適當予以改正，相信學習者在這單元的學習成就將會提升許多，也會相對使得學習成績提升。另外，此研究在過程中，研究者先將試題回收初步整理後發覺學習者在各主題類型的錯誤類型，可初步分類為以下：

- 類型一：直線的參數式
- 類型二：直線的對稱比例式
- 類型三：直線和平面的關係
- 類型四：直線與直線的關係

其中類型一與類型二測驗目的是為了瞭解學生在基本空間直線的知識是否建立，而類型三的題目則是進一步應用空間中直線學習的內容。最後類型四的部分題型，是屬於應用的層級，除了課本所涵蓋之知識外，尚需要加入從平面的單元所理解的相關知識，舉一反三地應用到空間的部分，所以空白比率顯著題高，學習者在晤談過程中也明確表示，有幾題無法確認第一步的解題方向，甚至完全沒有解題概念。

完成資料整理，緊接著研究者透過半結構式的晤談，可以更加瞭解學習者空白部分，其中真正的原因為何，以及書寫過程中所無法發現或是忽略的錯誤思考解題過程。研究者利用量化數據與質的晤談此兩項特點結合，可以了解目前學習者學習的錯誤盲點為何，以及學習者為何會建立出錯誤的解題模型。所以此研究可以協助進一步幫助了解教師在此單元的教授過程中，每一個小主題應該如何幫助學習者建立知識架構，及正確的解題歷程。舉例來說，第五題：「已知直線 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-2}$ 與 $L_2:\frac{x+1}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{4}$ 重合，求 a ，b ，y_0 ，z_0 的值？」，解題的第一個概念是兩直線重合，必須具有兩個條件。第一，兩直線的方向向量必須相等；第二，直線 L_1 上的任意一點必須落在 L_2 上。所以第一個條件可以得知並解出 a ，b 的值。接著，第二個條件必須有個概念，假如要表示直線 L_1 上的任意一點，可以用參數式表示。因此，解題的第二步驟，就是將直線 L_1 的任意點以參數式表示，亦即 $x=1+t$ ；$y=-1-t$ ；$z=-2t$ ，接著代入直線 L_2 的對稱比例式，即可求出 y_0 ，z_0 。但是，發覺學習者在解題的過程中，第一個問題是學習者知道方向向量要相等，但為何如此卻回答不知道。當研究者提示之後，才猛然發覺是上課所學習過的，只是聽過就忘了，也不知道要將其筆記起來。第二個問題是，兩直線重合必須直線 L_1 上的任意一點代入直線 L_2 的對稱比例式亦符合。所以須先將直線 L_1 的任意點以參數式表示才可以，許多學習者忘記此點解題方式，因此幾乎只答對前兩個答案，後面兩個答案無法順利答對，表示學習者並沒有習慣記住直線上表示任一點的方法是可以用參數式的。

類型三的題號七：「已知兩直線 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 與 $L_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ 相交於一點，求包含 L_1 與 L_2 之平面 E 的方程式」，此題的解題概念是兩向量的外積概念與平面的法向量關係。首先，要形成一個平面必須先利用此平面上的向量均和平面的法向量相垂直的關係，而這些平面上向量的公垂向量和法向量平行，故利用題目所給的兩直線方向向量分別為直線 L_1 方向向量 $=V_{L_1}(2,1,-1)$ 、直線 L_2 方向向量 $=V_{L_2}(1,-1,2)$ ，

外積可得公垂向量 $=\left(\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right)=(1,\ -5,\ -3)$，因法向量和公垂向量相平行，故將其公垂向量視為法向量。以上是解題號七所需之第一個步驟，但觀察發現此題的錯誤率偏高(有 34 位錯誤)，且空白所佔比例亦高(空白比率 23%)，因此希望由晤談得知為何有如此高的空白率。經過晤談之後得知，少許晤談者是忘記在前一章單元所學得外積的觀念，一些是不知道可以利用直線對稱比例式所給的方向向量加以應用，只有少部分是因為外積計算錯誤。由此可知，學習者常因為學習到新的單元時，容易將前面所習得之知識暫時予以排除，或者因為新學習經驗影響到舊有的學習經驗。以下為各個類型之中，採取半結構晤談的學習者所寫解題過程及錯誤分析探討：

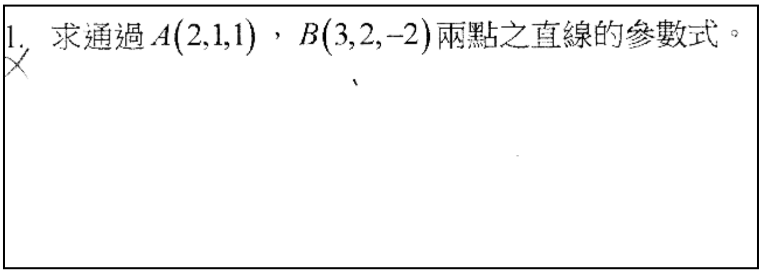
4.3.1 類型一：直線的參數式

表 4.3.1-1 類型一：直線的參數式

主題類型	錯誤概念	錯誤人數
類型一：直線的參數式	參數式定義不清楚	1
	參數式定義混淆	0

(一)學生試卷(S13)：

該生本題空白，因此題在所有樣本中只有此位學生錯誤，故研究者利用晤談方式了解其原因為何?


1. 求通過 $A(2,1,1)$，$B(3,2,-2)$ 兩點之直線的參數式。

(二)分析原因：

學習者可能對直線的參數式定義不清楚。

(三)晤談內容：

師：關於第一題，這一題你對題目所要求的計算了解嗎?

生：嗯。

師：那為何沒有寫而留空白呢?

生：因為太簡單了，所以想把時間花在其他題目的計算。

師：所以你是會寫的，那可以寫一遍給老師看嗎?

生：好的。

師：很好，答對。

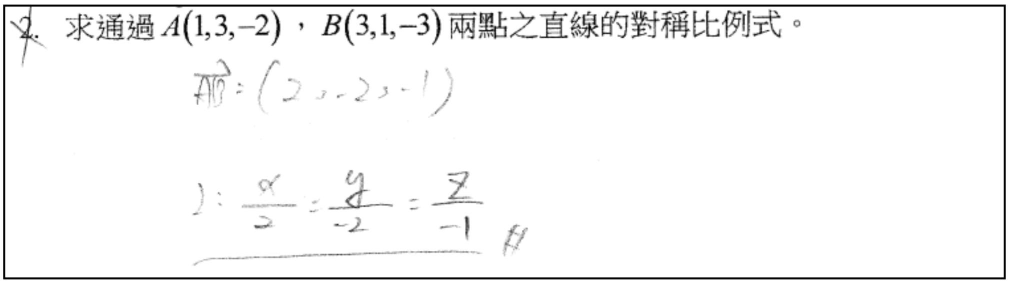
4.3.2 類型二：直線的對稱比例式

表 4.3.2-1 直線的對稱式

主題類型	錯誤概念	錯誤人數
類型二：直線的對稱比例式	對稱比例式定義不清楚	1
	對稱比例式定義混淆	2
	計算錯誤	3

(一)學生試卷(S07)：

1.學生試卷：


2. 求通過 $A(1,3,-2)$，$B(3,1,-3)$ 兩點之直線的對稱比例式。

$\overrightarrow{AB} = (2,-2,-1)$

$L: \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-1}$ #

2.分析原因：

學習者對直線的對稱比例式定義可能不清楚。

3.晤談內容

師：你對這一題的題目所敘述的直線對稱比例式定義了解嗎?
生：知道。
師：這一題你第一步算式正確，可是你的算式中的第二步錯誤，你知道為何錯誤的原因嗎?
生：知道。我寫太快。
師：你可否重新寫一遍你認為正確的算式?
生：好的。
師：很好，正確。所以你是確實了解的。

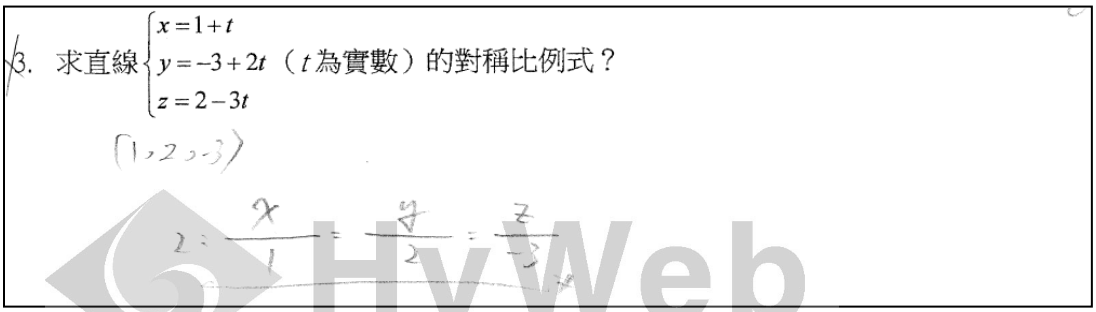
4.3.3 類型三：直線和平面的關係

表 4.3.3-1 類型三：直線和平面的關係

主題類型	錯誤概念	錯誤人數
類型三：直線和平面的關係	直線用參數式表示的意義	9
	直線和平面交點的意義	21
	空間中兩直線的關係	6
	兩向量的外積概念與平面的法向量關係	34
	利用點法式寫出平面方程式	13

(一)學生試卷① (S07)：

1. 學生試卷①：直線用參數式表示的意義


3. 求直線 $\begin{cases} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=2-3t \end{cases}$（$t$為實數）的對稱比例式？

(1,2,-3)

2: $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-3}$

2. 分析原因：

學習者對直線方程式中參數式與對稱比例式的互換不清楚。

3. 晤談內容：

師：請問這一題原先敘述是直線方程式表示法的哪一種，你知道嗎?

生：搖頭。

師：那我解釋一遍這題的學習內容，你願意聽嗎?

生：好。

~老師重新將空間中直線的方程式表示法再次敘述講解~

生：了解了。

師：那你可以重新計算一遍給我看嗎 ？

生：應該可以吧。

師：很好。

(二)學生試卷②(S10)：

1. 學生試卷②：直線和平面交點的意義

4. 求直線 $L:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$ 與平面 $E:x+2y-z=6$ 的交點坐標？

$$\begin{cases} x=-2+t \\ y=1+2t \\ z=3t \end{cases}$$

2. 分析原因：

(1) 學習者不知道直線和平面的交點可以先用參數式表示交點坐標。

(2) 學習者對直線方程式中對稱比例式以參數的方式寫出並予以應用不熟悉。

3. 晤談內容：

師：看了你的算式，發現你知道這一題初步的想法是先將直線的對稱比列式化為參數式，但接著是空白，請問接下來你知道怎麼繼續第二步嗎?

生：搖頭~我只知道這樣，其餘不會。

師：其實你知道第一步的作法，是完全正確，很棒。但是第二步驟並不難，我畫個圖你看一看。

師：圖形中平面和直線的交點你會怎麼假設坐標?

生：搖頭~

師：好的，我問你，你知道你寫成的直線參數式的目的嗎?

生：搖頭~

師：好。直線參數式的 t 是不是可以任意代入數值?如果可以，那不就是表是說直線參數式可以用來表示這一條直線上的任意一個點坐標，是嗎?

生：點頭。

師：所以我可不可以將這個參數式進一步當作直線和空間中平面的交點?

生：可以。

師：既然可以那就是把這一點坐標寫成 $(-2+t,1+2t,3t)$ 。而且，既然是交點，是不是就是代表這一點也落在平面上，你看這個圖，是不是呢?

生：是的。所以是不是再將這個坐標代入直線方程式就好。

師：是的。

生：好我懂了。謝謝老師。

(三)學生試卷③(S08)：

1. 學生試卷③：空間中兩直線的關係：兩直線重合

5. 已知直線 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{-2}$ 與 $L_2:\frac{x+1}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{4}$ 重合，求 a，b，y_0，z_0 的值？

$\vec{V}_{L_1}=(1,-1,-2)$　　$\frac{1}{a}=\frac{-1}{b}=\frac{-2}{4}$

$\vec{V}_{L_2}=(a,b,4)$　　$4=-2a$　　$-4=-2b$

$a=-2$　　$b=2$

2. 分析原因：

(1) 學習者對直線方程式中對稱比例式以參數的方式寫出沒有問題。

(2) 學習者無法進一步將參數式予以應用在兩直線重合的條件。

3. 晤談內容：

師：你知道題目所說的兩直線重合的意思嗎?

生：不是很了解

師：那你說說為何你第一步驟要將直線的方向向量寫出?

生：因為我想要寫出參數式

師：那你寫出參數式的理由呢?

生：不知道。就想說這樣寫寫看。

師：那我解釋一下，寫出參數式是為了利用參數式可以表示直線上的任意一個點，例如你隨意假設 t 的值代入參數式的點坐標，是不是就會發現會產生一個新的點坐標呢?

生：是的。

師：所以我將兩條直線都用參數式表示它們線上的任意點，可以嗎?

生：嗯。

師：那我再問，兩直線重合的這句話你會發現，和我們剛剛寫參數式來表示點坐標有什麼關係?

生：搖頭。

師：我先畫一個圖。既然參數式是表示直線上任一點，所以當兩直線重合的話，就是說代表 L_1 上的參數式坐標與代表 L_2 上的參數式坐標是相同的。所以兩個參數式可以相等的，對吧?

生：所以就表示，$1+t=-1+as$ 。是嗎?

師：是的，可是如果不先找出 a，b ，不也是無法算嗎?所以怎解決呢?

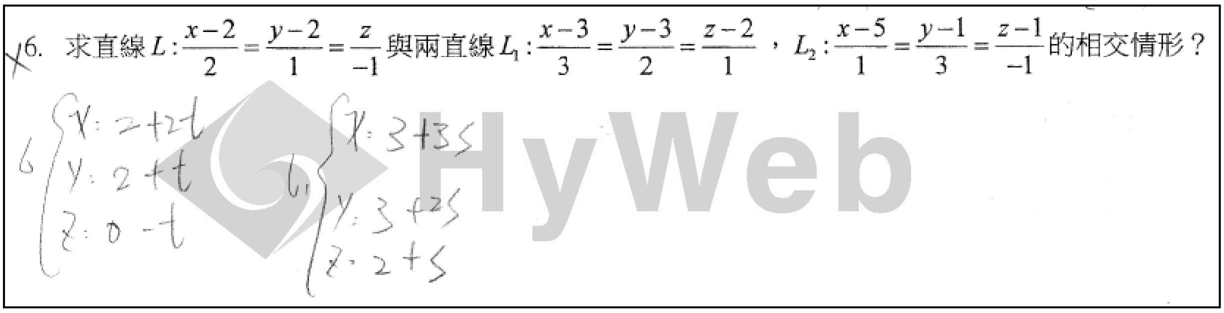
生：方向向量應該是等比例吧?所以 $a=-2$，$b=2$ 。

師：很好。你接下來可以繼續完成吧?

生：嗯，可以。

(四)學生試卷④(S47)：

1. 學生試卷④：空間中兩直線的關係：兩直線交於一點


6. 求直線 $L:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ 與兩直線 $L_1:\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$，$L_2:\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}$ 的相交情形？

$L\begin{cases}x:2+2t\\y:2+t\\z:0-t\end{cases}$ $L_1\begin{cases}x:3+3s\\y:3+2s\\z:2+s\end{cases}$

2. 分析原因：

學習者知道第一步先以參數式表示，接著並不知道該如何擬定解題計畫。

3. 晤談內容：

師：看了你的算式，發現你知道這一題初步的想法是先將直線的對稱比列式化為參數式，但接著是空白，是為何原因？還有請問接下來你知道怎麼繼續第二步嗎？

生：嗯，原因就是不會算。

師：請問你知道如何確定兩直線相交於一點呢？

生：大概就是這一點在這直線上也在另一直線上的意思。

師：是啊，你講得沒錯。所以就是說在這直線上的點坐標和另一直線上的點坐標應該相同吧？

生：所以是說，這個 $2+2t=3+3s$ 嗎？

師：是啊。同理 y 坐標也是，Z 坐標也是。

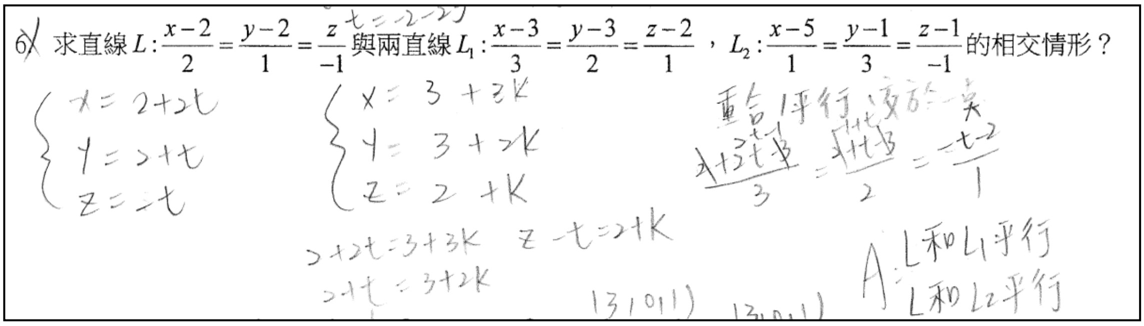
生：那不就是三個去解出 t，s？

師：嗯。

生：懂了。

(五)學生試卷⑤(S49)：

1. 學生試卷⑤：空間中兩直線的關係：兩直線歪斜


6. 求直線 $L:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$ 與兩直線 $L_1:\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{1}$，$L_2:\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{-1}$ 的相交情形？

2. 分析原因：

(1)學習者掌握不到直線相交情形的條件

(2)定義混淆

3. 晤談內容：

師：你可以解釋一下你的第一步驟嗎?
生：我是先猜可能是交於一點，所以參數式相等去算。
師：請問你知道如何確定兩直線相交於一點或是平行呢?
生：不太清楚。
師：需要我把兩直線的關係講述一遍嗎?
生：可以嗎?
老師將兩直線的關係再重新講述一遍。~
師：這樣你會怎做?
生：原來是先看方向向量，先決定可能的情形。這樣大概懂了
師：嗯。
生：我自己算。
師：好的。

(六)學生試卷⑥(S28)：

1. 學生試卷⑥：兩向量的外積概念與平面的法向量關係

7. 已知兩直線 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 與 $L_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}$ 相交於一點，求包含 L_1 與 L_2 之平面 E 的方程式？

$(2,1,-1)$ $(1,-1,2)$

$1(x-1)-(y+5)+2(z+3)=0$

$(1,-5,-3)$

2. 分析原因：

(1) 學習者不知道直線和平面的交點可以先用參數式表示交點坐標。

(2) 學習者對直線方程式中對稱比例式以參數的方式寫出並予以應用不熟悉。

3. 晤談內容：

師：首先你知道第一步驟是要寫成參數式嗎?
生：不確定。應該吧~
師：你把題目倒回來思考看看。如何找平面方程式呢?
生：你上次有說，先找法向量
師：很好，然後呢?如何找法向量?
生：是不是這樣?不太知道~
學生書寫錯誤~
師：好，我講解一次，計算過程你寫。
生：好的。
師：找出法向量之後呢?如何下一步?
生：不太知道。
師：好，我再講解一次，
生：有懂一些。
師：很好。
生：那我以後也可以這樣問你嗎?
師：可以。

4.3.4 類型四：直線與直線的關係

表 4-3-4 類型四：直線與直線的關係

主題類型	錯誤概念	錯誤人數
類型四：直線與直線的關係	應用問題讀題(兩直線交於一點)	35
	空間中一點到直線的距離	27
	空間中兩平面的交線表示	37
	空間中兩平行直線的距離	25
	空間中兩歪斜直線的距離	39

(一)學生試卷①(S13)：

1. 學生試卷①：應用問題讀題

8. 李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從$(0,0,2)$朝向$(5,8,3)$發射一固定雷射光束，接著又從點$(0,7,a)$沿平行於x軸方向發射另一雷射光束，試問當a為何值時，兩雷射光束會相交？

平行x軸 ⇒ $(1,0,0)$

$(0,7,a)$

$(0,0,2)$ $(5,8,3)$ ⇒ $\begin{cases} x=0+5t \\ y=0+8t \\ z=2+t \end{cases}$

$(1,0,0)$ $(0,7,a)$ ⇒ $\begin{cases} x=1-m \\ y=0+7m \\ z=0+am \end{cases}$

$\begin{cases} 5t=1-m \\ 8t=7m \end{cases}$ ⇒ $3t=8m-1$

$2+t=am$ ⇒ $6+3t=3am$ ⇒ $6+8m-1=3am$

A: $a=(-1)$

2. 分析原因：

(1) 學習者對應用問題的題意了解程度。

(2) 學習者對空間中兩直線交於一點的解法不熟悉。

3. 晤談內容：

師：你可以了解題目嗎?

生：看不懂，不會算。因為不懂題目意思。不然你解釋一下。

老師解釋題目一次，並畫圖~

師：這樣呢?

生：大概知道。應該會算

師：嗯。很好，所以你是不清楚題目意思畫不出來

生：嗯

(二)學生試卷②(S18)：

1. 學生試卷②：平行於x軸的方向向量。

8. 李探長為了找尋槍手的可能發射位置，他設定一空間坐標，先從$(0,0,2)$朝向$(5,8,3)$發射一固定雷射光束，接著又從點$(0,7,a)$沿平行於x軸方向發射另一雷射光束，試問當a為何值時，兩雷射光束會相交？

$(0,0,2)\rightarrow(5,8,3)$

$\vec{V_L}=(5,8,1)$ $\frac{x}{5}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{1}$

$(0,7,a)$沿x軸，y無變化。

2. 分析原因：

(1)學習者不知道平行於x軸的方向向量如何寫出。

(2)學習者對於空間中兩直線交於一點的解法並不熟悉。

3. 晤談內容：

師：你可以理解題目的意思並講出來給我聽嗎?
生：這題不是很懂。
師：那你先解釋你第一步驟是什麼?
生：就是從(0,0,2)到(5,8,3)的向量。
師：你是說這兩個點的方向向量嗎?
生：是啊。
師：那另外從(0,7,a)沿平行x軸的方向向量呢?
生：不會。
師：我畫個圖給你看。你看這圖發現什麼?
生：這樣方向向量不就是(0,7,a)往(1,0,0)
師：很好。那接下來呢?
生(搖頭)：嗯~
師：你可以用參數式表示這兩條直線嗎?
生：可以。
師：接著呢?
生：兩個相等。
師：為何相等?
生：因為你講過交於一點就是相等。
師：好的，good。

(三)學生試卷③(S14)：

1. 學生試卷③：空間中一點到直線的最短距離

9. 已知點$P(1,0,1)$，直線L: $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{2}$，且自$P$點作直線$L$的垂線與直線$L$交於$A$點，求點$P$到直線$L$的距離？

$$\begin{cases} x=3t \\ y=t+1 \\ z=2t-5 \end{cases} \quad (t\in R)$$

2. 分析原因：

(1)學習者知道參數式可以表示直線上任一點，但不知道接下來如何應用相垂直的條件。

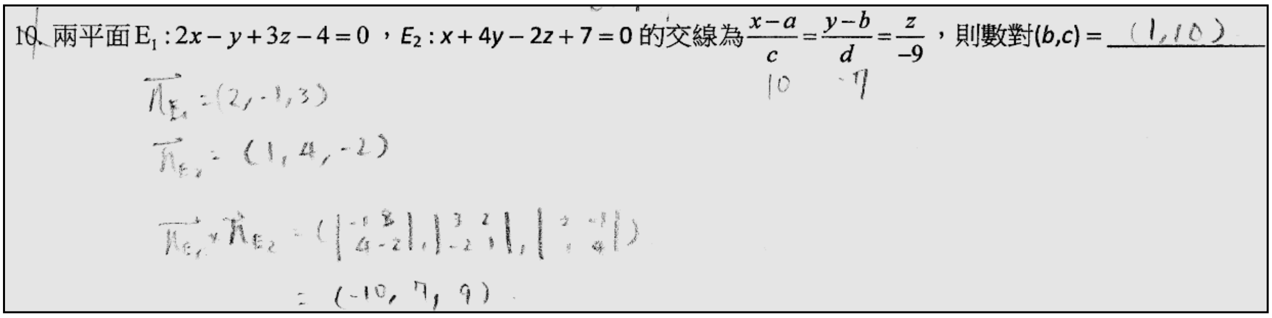
(2)學習者對題目要求點到空間中直線的距離沒有概念。

3. 晤談內容：

師：首先你可以寫出第一步驟是要寫成參數式?
生：是的，但後來就不會了。
師：你把題目覺得重要的劃出來?
學生自己旁邊畫圖~
生：垂直
師：很好，然後呢?垂直你會怎樣?
生：是不是這樣?不太知道~
師：我幫你在這圖上加上垂直的符號。
師：你發現了嗎?
生：還是有點不清楚。
師：好，我講解一次，計算過程你寫。
生：好的。
師：你會發現參數式的點和 P 點所形成的向量和直線 L 的方向向量如何?
生：垂直。喔~我知道，內積相乘等於 0。
師：這樣可以找出 t，然後呢?
生：是不是代回去找那一點?
師：是的。
生：所以最後算距離就是兩點距離嗎？
師：是的。很好。

(四)學生試卷④(S08)：

1. 學生試卷④：空間中兩平面的交線


10、兩平面 $E_1: 2x-y+3z-4=0$，$E_2: x+4y-2z+7=0$ 的交線為 $\frac{x-a}{c}=\frac{y-b}{d}=\frac{z}{-9}$，則數對 $(b,c)=$ (1,10)

10 -7

$\vec{n}_{E_1}=(2,-1,3)$

$\vec{n}_{E_2}=(1,4,-2)$

$\vec{n}_{E_1}\times\vec{n}_{E_2}=\left(\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}\right)$

$=(-10,7,9)$

2. 分析原因：

(1)學習者不知道兩平面的交線可以先用外積算出此交線的方向向量。

(2)學習者對直線方程式中對稱比例式應用不熟悉，所以不清楚從對稱比例式中找出交線會通過的點坐標。

3. 晤談內容：

師：首先你可以解釋你對題目要求的問題了解嗎?
生：大該知道。要先將直線的法向量寫出。
師：然後呢?
生：應該是外積，用行列式。
師：很好，然後呢?你會怎樣?
生：不太知道~我不確定
師：加油，沒關係。
師：需要我繼續講嗎?
生：需要。
師：好，我講解一次，我利用旁邊簡單畫兩個平面圖，計算過程你寫。
~老師講解如何找出兩平面交線
生：好的，了解。

(五)學生試卷⑤(S13)：

1. 學生試卷⑤：空間中兩平行線的距離

1. 空間中兩平行線 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 與 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-8}{-1}$ 之間的距離為 $\frac{2}{3}\sqrt{15}$

$$\begin{cases} x=2t \\ y=1+t \\ z=2-t \end{cases}$$

$$(1,1,2)-(1,-1,8) \Rightarrow (0,2,-6) \Rightarrow \sqrt{4+36} \Rightarrow \sqrt{40}$$

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{6}} \Rightarrow \sqrt{\frac{20}{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{60}}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}\sqrt{15}$$

2. 分析原因：

(1)學習者一開始了解可以用參數式表示平行線上的任一點，但接下來對空間中兩平行線之間距離的處理卻不清楚。

(2)學習者誤認對稱比例式上的兩點就是兩平行線上最短距離。

3. 晤談內容：

師：首先你可以解釋你對題目要求的問題了解嗎?

生：不太懂，所以亂算。

師：你可以說說你為何第一步驟是這樣?

生：就先化成參數式。

師：很好，然後呢?你會怎樣?

生：不太知道~

師：有進步，加油。

師：需要我繼續講嗎?

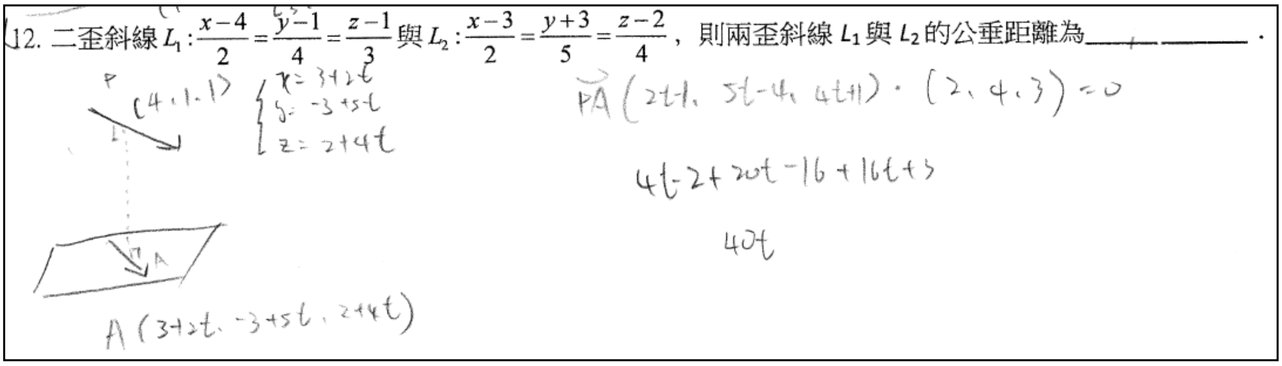
生：需要。

師：好，我講解一次，旁邊畫個圖，你仔細看一下。計算過程你寫。

生：好的

(六)學生試卷⑥：

1. 學生試卷⑥：空間中兩歪斜線之間的距離



12. 二歪斜線 $L_1: \frac{x-4}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{3}$ 與 $L_2: \frac{x-3}{2}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-2}{4}$，則兩歪斜線 L_1 與 L_2 的公垂距離為________ .

P (4,1,1)

$x=3+2t$, $y=-3+5t$, $z=2+4t$

$\overrightarrow{PA}(2t-1, 5t-4, 4t+1)\cdot(2,4,3)=0$

$4t-2+20t-16+16t+3$

$40t$

A

$A(3+2t, -3+5t, 2+4t)$

2. 分析原因：

(1)此題的空白率很高，幾乎是完全放棄，選取晤談其中一位學習者，了解錯誤原因為何。

(2)學習者對直線方程式中對稱比例式以參數的方式寫出並予以應用不熟悉。

3. 晤談內容：

師：首先你可以解釋你對題目要求的問題了解嗎?

生：大該知道。要先將直線和 L_2 方程式換成參數式就對了。

師：然後呢?

生：它們好像垂直

師：很好，然後呢?垂直你會怎樣?

生：是相乘等於 0 吧。不太知道~

師：你很不錯，有 70%的概念，加油。

師：需要我繼續講嗎?

生：需要。

師：好，我講解一次，計算過程你寫。

生：好的

透過自編單元測驗，並從高分群與低分群中和學生進行半結構式晤談，歸納並整理出以下錯誤原因：

一、 「空間中的直線」單元的知識架構

此單元中所包含的知識架構，有幾大主題，依次為：

1.空間中的直線方程式表示法

2.空間中兩直線的相交情形

3.外積的應用

4.平面的方程式

5.公垂線的假設

6.空間中的投影點

二、 空間圖形的想像

學生從平面向量開始學習，包含向量的內積、行列式及外積等。這中間的學習過程所累積的內容多且繁瑣，學習者通常必須花費更多的學習時間。尤其本身對空間概念較差的學習者，無法想像空間的立體形狀。例如：當一個題目如果敘述平面和直線的關係時，學習者通常習慣性會畫一個平面然後垂直畫一直線穿過平面，這樣的情況屢見不鮮，然而實際上幾乎很少會有直線剛好垂直於平面。甚至題目如果敘述交於一點，學習者並不清楚可以將題目中的直線方程式，轉成參數式去描述，如此一來便無法理解交點也可以用參數式表示，接著解題就會停住。

學習空間的單元，教師在講述時最好多用觸手可及的立體實物來作解釋，其好

處是可以讓學習者一眼就可以想像空間的架構，避免一開始學習過程就陷入圖形的建構失敗中。

三、 在空間中直線參數式的應用

從有關的教學研究中發現，以往教師發覺學生有錯誤的答案時，常認為學生可能是粗心，不了解題意或是整體概念不清所導致，籠統且含糊地 將學生的錯誤進行劃分。因此，教師應協助學生建構正確的數學概念，然後引導學生從自我建構中發現自己的錯誤概念，進而建立正確的數學知識。

楊弢亮（1992）認為數學概念的教學過程就是要使學生認識概念的來源及意義，理解概念的性質及相互關係，會運用概念解決問題的過程。在實際教學現場，應當從生活中援舉事例並和學生已有舊知識與經驗出發，連結新概念。對於容易產生混淆的概念，要引導學生用對比喻方式教授彼此間的區別和聯繫。另外，又認為數學概念的引入通常採取下述幾種方式:

1. 利用學生的生活經驗：教師應注意收集和運用現實生活中能夠反映數學概念的實際模型和事例，舉出了實際事例，也說明這個概念的客觀現實性。
2. 利用教材所提供的感性材料：數學概念的引入過程可以是充分利用教材所提供的感性材料，先用實際事物或模型、圖表，使學生獲得關於新概念的直觀形象，再提出概念的定義。
3. 由定義引入：數學概念也可以先由定義引入，再用感性材料來加以證實。
4. 由舊概念引入新概念：根據新舊知識聯繫的原則，數學概念的引入，可以從種概念引入類概念，採用對比方法，利用逆反關係，運用概念的推廣或特例的聯繫。

在此單元測驗中，空間中直線的參數式非常常用，其目的是可以描述直線上的任意一點，透過一個變數即可將直線上的任意點寫出，說明如下：

直線參數式：

通過點 $\mathrm{A}\left(x_0, y_0, z_0\right)$，且以非零向量 $\overrightarrow{v}=\left(a,b,c\right)$ 為方向向量之直線 L 的參數式

為 $L:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$（t 為實數）

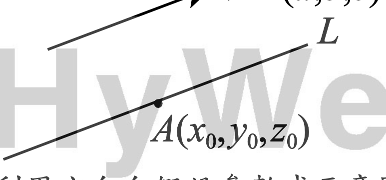


圖 4-3-2 利用方向向假設參數式示意圖

由以上得知，直線參數式的應用很廣。以本單元測驗來說，錯誤率及空白比例很高的第 8、11、12 題，幾乎都適用此方式為第一步的解題。研究者以高分群其中一位試卷書寫解題內容為例：學習者第一步驟先將兩直線的方程式化成參數式，利用參數式描述兩直線上彼此最接近的兩個點坐標，然後利用內積的觀念，解出變數，接著帶回原坐標，最後將兩座標的距離用公式解出，即可完成。

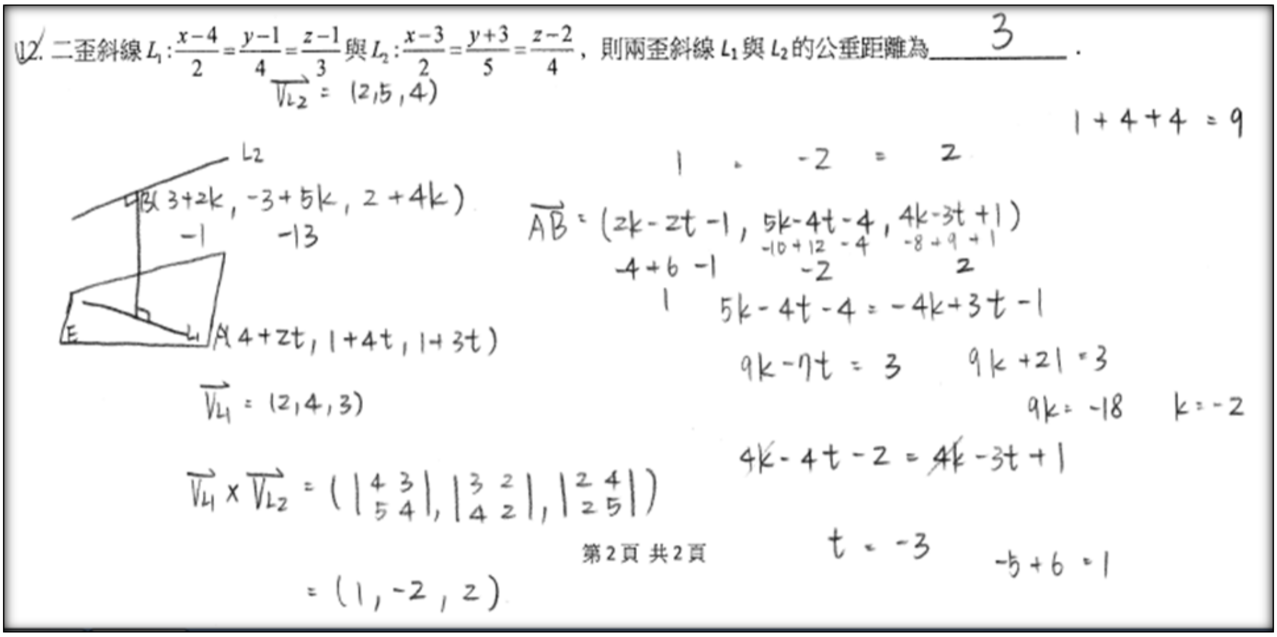


圖 4-3-3 高分群學生解題過程參考

5.討論 Discussion

本研究之目的在探討高中學生在「空間中的直線」的學習概況，整理錯誤情形、類型及其產生錯誤的可能原因。研究者將本研究得到的結果整理及歸納之後，提出一些結論與建議，希望能提供教師在日後教學過程中，除了空間向量基本觀念之外，也能針對學生容易發生的解題困惑與常常發生的錯誤概念加入提供適當的例子說明，幫助學習者建立正確的數學解題概念，進而改善學生學習之成效，減少錯誤概念形成。且希望可以提供教師制定適合的教學策略、實施補救教學及 改進教學方式的依據與參考資料。根據本研究三個待答問題，獲得下列幾點結論，茲分析如下：

5.1 台南地區高中學生在「空間中的直線」學習概況

本研究經過自編單元測驗蒐集分析後發現整體通過率約 5 成，可見學習狀況並不會太差，此次測驗共分為四個類型向度，依次分析如下：

(一)類型一：「直線的參數式」

1.題目是第一題，錯誤情形是空白，其錯誤情形原以為是學習者連最基本的題目概念都沒有，但經過晤談發現是因為學生想花時間在解其他題目上。

2.此題為基本題，目的是為了提升作答意願。一份試卷避免難度太高分數過低，造成作答意願低落，而使得信效度不足。

(二)類型二：「直線的對稱比例式」

1.題目分布為第二題共一題。錯誤情形最多的是計算錯誤，有 3 人。其錯誤情形分析如下：

(1)對稱比例式定義不清楚：有 1 人並不清楚何謂直線的對稱比例式。

(2)對稱比例式定義混淆：有 2 人不知道要先從方向向量計算得知。

(3)計算錯誤：這情形較多，並不是不會但筆誤較多。

2.錯誤情形最多的是計算錯誤，有些同學很懊惱，竟然沒有注意自己在方向向量上計算錯誤，平白損失。雖然題目簡單，但同學仍會不經意發生計算上的錯誤。

(三)類型三：「直線和平面的關係」

1.題目分布為第三題至第七題共 5 題。錯誤情形最多的依次是，兩向量的外積概念與平面的法向量關係、直線和平面交點的意義以及利用點法式寫出平面方程式。其錯誤情形分析如下：

(1)兩向量的外積概念與平面的法向量關係：有高達 34 人並不清楚何時必須用外積去求平面的法向量。

(2)直線和平面交點的意義：有 21 人錯誤，表示不清楚直線和平面的交點可以用參數式表示。

(3)利用點法式寫出平面方程式：這情形雖較少，有 13 人錯誤，但是這部分嚴格來說是前一單元所習得知識內容。

2.這部分錯誤情形除了直線和平面的交點外，其餘兩個錯誤情形都是前一章的內容，但在此學習單元卻不知道該如何應用，可見學習者無法明確知道應用。

(四)類型四：「直線和直線的關係」

1.題目分布為第八題至第十二題共 5 題。這部分的難度明顯提升，所以錯誤的人數大幅攀升，錯誤情形最多的依次是，空間中兩歪斜直線的距離、空間中兩平面的交線表示以及應用問題讀題(兩直線交於一點)。其錯誤情形分析如下：

(1)空間中兩歪斜直線的距離：這是第十二題，也是整個學習單元當中需要使用到最多概念的一題，因此大部分的同學此題幾乎是空白。

(2)空間中兩平面的交線表示：此題為第十題，題目是要學習者將兩平面相交的直線用對稱比例式表示出。

(3)應用問題讀題(兩直線交於一點)：此題為第八題，題目是應用問題，但分析題目其實是兩直線交於一點的題型，可是同學不是空白就是沒有清楚概念。

2.類型四是空間中直線和直線的關係，這部分最主要是屬於應用，必須要有清楚的學習概念，例如：第九題「空間中一點到直線的距離」必須有參數式的概念，並且要用內積的概念，求出參數之後才能找出最近點，如此才能找出最近距離。

5.2 台南地區高中學生在對「空間中直線」單元上之錯誤類型

(一)運算技能不足(先備知識不足)

1.直線的方程式寫法錯誤

例：不清楚直線參數式、對稱比例式等直線方程式的表示法。

2.空間中直線和平面的關係

例如：空間中直線和平面的關係有三種，三種計算方式略微不同。

3.空間中兩直線的關係種類讀題錯誤

例如：空間中直線和直線的關係分為兩類共四種，解題步驟也不同，而學習者讀題錯誤造成解題錯誤。

4.四則運算計算錯誤

例如：空間中直線算式較多心像符號且計算思考複雜，所以造成計算錯誤。

(二)定義觀念不熟悉

1.直線的方程式轉換錯誤

例如：空間中直線算式較多心像符號且計算思考複雜，所以造成計算錯誤。

2.參數式的應用不熟悉

例如：直線參數式往往是解題的第一步驟，利用參數式亦可以簡化計算。若不熟悉則不知道如何擬定解題的每一步驟。

3.外積運算錯誤

例如：外積的計算有一定格式順序，不熟悉的話就會錯誤。

4.立體空間的觀念

例如：缺乏立體空間的概念會造成學習者對題目讀題的困惑，甚至無法畫出題目所需要的圖形以利解題。

5.3 台南地區高中學生在對「空間中直線」單元上之錯誤原因

(一)先備知識錯誤或不足。

例如：無法或計算寫出直線參數式、對稱比例式等觀念錯誤或基本觀念錯誤。

(二)條件忽略、忘記或誤加。

例如：空間中的兩直線關係有重合、交於一點或平行等三類。

(三)粗心計算或者筆誤。

例如：找公垂向量須利用外積的計算，結果行列式計算錯誤。

(四)敷衍應付或解題概念缺乏。

例如：因本單元內容難度較高，故對學習內容敷衍。另外有些空白部分是完全不曉得如何擬題去計算。

(五)學生可能有不適當的類化或錯誤的推廣、延伸。

例如：平行於 x 軸的方向向量。

6.結論 Conclusions

此研究的最大目的是找出學習者的問題點以及給予教學者反思的空間。雖然自編測驗在題目編寫仍有改進空間，但也凸顯出此單元學習者的學習弱點為何，從中整理如下：

一、錯誤類型

(一) 運算技能不足(先備知識不足)

1. 直線的方程式寫法錯誤。
2. 空間中直線和平面的關係。
3. 空間中兩直線的關係種類讀題錯誤。
4. 四則運算計算錯誤。

(二) 定義觀念不熟悉

1. 直線的方程式轉換錯誤。
2. 參數式的應用不熟悉。
3. 外積運算錯誤。
4. 立體空間的觀念。

二、錯誤原因

(一)先備知識錯誤或不足。

(二)條件忽略、忘記或誤加。

(三)粗心計算或者筆誤。

(四)敷衍應付或解題概念缺乏。

(五)學生可能有不適當的類化或錯誤的推廣、延伸。

誌　謝

穿上紅色的畢業袍，看著鳳凰花瓣在午後的烈陽下繽紛掉落。回顧過去兩年，記憶猶如一列急駛而過的火車，這列車承載著我、老師及同學們一起為論文打拼的點滴。

兩年前和內人提及進修的意願，經過幾天思索後決定試試看。然而，在完成報考程序後，距離測驗時間已迫在眉梢，趕緊把大學時期用書簡單翻了幾頁就上場了。承蒙上天眷顧，有幸錄取，但隨之而來的是惶惶不安的心情，擔心自己實力夠嗎？時間的分配可以嗎？

經歷起初半年的磨合與學習，我逐漸熟悉系館格致樓的味道。和黃建中老師聊過後，便決定邀請建中老師擔任我論文的指導教授。建中老師平素裡雖然幽默，但在課堂中可是滿滿地要求，一絲不苟做學問的教學風格正適合我這懶散的個性；也因為老師背後不斷地督促，我才能堅持走下去並順利在兩年內完成論文。

這期間有賴本系所葉啟村老師、謝碧雪老師以及孫新民老師的指導，讓我論文內容一點一滴累積而成，加上義翔、伊邡、怡萱等同學的協助；及服務學校有蔡厚淵老師、陳柏州老師協助試題卷的編製，以及王永順老師與施悅欣老師英文翻譯協助，謝謝你們。

論文付梓的當天，播了通電話給家鄉的父母親，感謝他們的栽培，更謝謝建中老師協助我完成人生另一里程。當然也謝謝我親愛的太太在我承受壓力之際，默默陪我渡過，也因有她強大的 word 的編輯能力，我才能在最後關頭完成論文撰寫。

今年的六月，令人喜悅的事情太多，因為論文完成後緊接著要迎接小生命到來。值此時刻，謹以此論文獻給曾幫助過我的師長、家人和朋友們，謝謝你們，並請接受我最誠摯的感激。

參考文獻

[1] 王信翰(2013)。**探討高中生平面向量概念學習情況與評量工具之研發**（未出版之碩士論文）。國立台灣師範大學，台北市。

[2] 李永貞(2008)。**高二學生在向量概念學習上的主要錯誤類型及其補救教學之研究**。國立台灣師範大學，台北市。

[3] 林森健(2014)。**台南地區高職學生對數單元錯誤類型之分析研究**（未出版之碩士論文）。國立臺南大學，臺南市。

[4] 林進發(2001)。**桃園地區高中學生向量內積之運算及應用錯誤類型之研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[5] 林福來(1982)。**談中學幾何教材**。科學教育月刊，46 期，頁 14～22。

[6] 莊景文(2013)。**桃園地區高二學生空間向量單元之錯誤類型分析**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[7] 張景媛(1984)。**數學文字題錯誤概念分析及學生建構數學概念的研究**。國立台灣師範大學心理與輔導學系教育心理學報，27 期，175~200頁。

[8] 教育部(2008)。**普通高級中學99課程綱要**。

[9] 許志農、黃森山、許琬青、陳清風、謝銘峰、南婷婷(2011)。**普通高級中學數學 第四冊**。新北市：龍騰文化。

[10] 許志農、黃森山、許琬青、陳清風、謝銘峰、南婷婷(2011)。**普通高級中學數學 第四冊教師手冊**。新北市：龍騰文化。

[11] 陳俊廷(2002)。**高中學生空間向量學習困難的診斷測驗工具發展研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[12] 陳基正(2007)。**綜合高中學生在「空間中直線與平面」單元**。高雄師範大學數學系。

[13] 彭建勛(2009)。**在動態幾何環境下空間直線與平面之教學實驗**。國立台灣師範大學，台北市。

[14] 黃渼淳(2001)。**高中生指數概念及運算錯誤類型分析之研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[15] 楊弢亮(1997)。**中學數學教學法通論**。台北市：九章出版社。

[16] 劉宏輝(1995)。**高雄地區高三學生解排列組合問題錯誤類型之分析研究**（未出版之碩士論文）。國立高雄師範大學，高雄市。

[17] Ashlock（1990）；Error patterns in computation: A semi-programmed approach(5thed).Columbus, Ohio:Merrill.

[18] Blinn, J. F. (2003). Lines in Space: Part 5--A Tale of Two Lines. *IEEE Computer Graphics and Applications*, *23*(6), 84-97.

[19] Bruner, J. S.(1960). *The process of education*. New York : Random House.

[20] Chazelle, B., Edelsbrunner, H., Guibas, L. J., Sharir, M., & Stolfi, J. (1996). Lines in space: Combinatorics and algorithms. *Algorithmica*, *15*(5), 428-447.

[21] Gagne’ E. D.(1985). *The cognitive psychology of school learning* . University of Texas, Austin,Texas(Boston: Litt1e, Brown & Company).

[22] Ki1patrick, J.(1967). Ana1yzing the so1ution of word Prob1ems in Mathematics: An Exp1ortory Study. *(Dortoral Dissertation, Standford University) U.M.I*.

[23] Ki1patrick, J.(1985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematica1 prob1em so1ving. Paper presented at Si1ver, EA. (Ed.), *Teaching and Learning mathematical problem solving: Multiple research prespectives, H5*. Hi11sdu1e, N. J.: Er1baum.

[24] Lester, F. K.(1982). Bui1ding bridges between psycho1ogica1 and mathematics education research on prob1em so1ving, In F.k. Lester & Garofa1o.(Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research*, 51~81.Phi1adephia, PA: The Frank1in Institute Press.

[25] Piaget, J.(1964). Deve1opment and Learning. In R. E. Ripp1e , et a1. (eds.) *Piaget Rediscovered*. Ithaca, New York, Schoo1 of Education, Corne11 University.